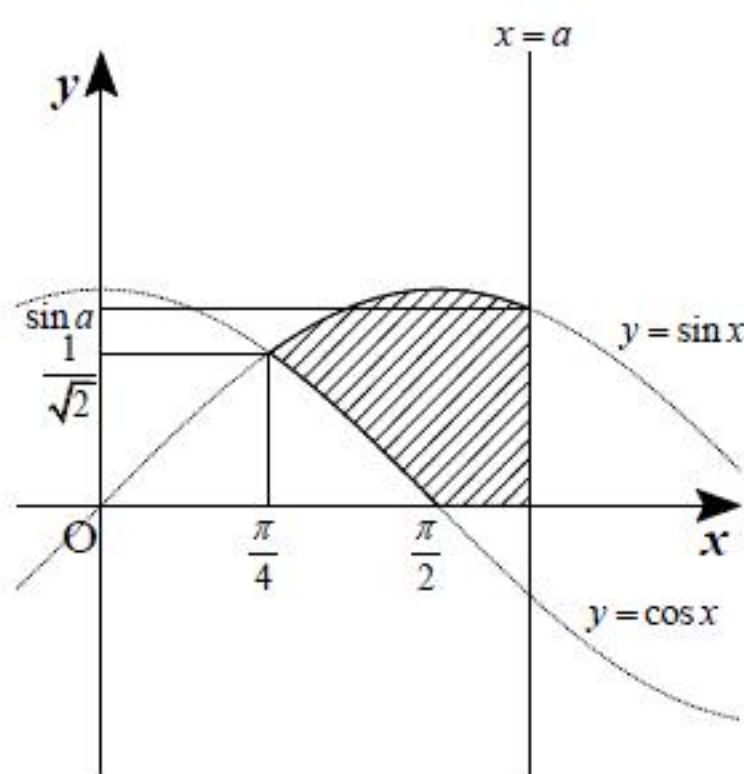


(1)

領域 D は下図の斜線部の領域である。



よって、求める面積 S は、

$$\begin{aligned}
 S &= \int_{\frac{\pi}{4}}^a \sin x \, dx - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx \\
 &= [-\cos x]_{\frac{\pi}{4}}^a - [\sin x]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \\
 &= -\cos a + \frac{1}{\sqrt{2}} - 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \\
 &= \sqrt{2} - 1 - \cos a
 \end{aligned}$$

となる。

(答) $S = \sqrt{2} - 1 - \cos a$

(2)

(1)の図より、求める体積 V は、

$$\begin{aligned}
 V &= \pi \int_{\frac{\pi}{4}}^a (\sin x)^2 \, dx - \pi \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)^2 \, dx \\
 &= -\pi \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2 x - \sin^2 x) \, dx + \pi \int_{\frac{\pi}{2}}^a \frac{1 - \cos 2x}{2} \, dx \\
 &= -\pi \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x \, dx + \frac{\pi}{2} \left[x - \frac{\sin 2x}{2} \right]_{\frac{\pi}{2}}^a \\
 &= -\pi \left[\frac{\sin 2x}{2} \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} + \frac{\pi}{2} \left(a - \frac{\sin 2a}{2} \right) - \frac{\pi^2}{4} \\
 &= \frac{\pi a}{2} - \frac{\pi \sin 2a}{4} - \frac{\pi^2}{4} + \frac{\pi}{2}
 \end{aligned}$$

となる。

(答) $V = \frac{\pi a}{2} - \frac{\pi \sin 2a}{4} - \frac{\pi^2}{4} + \frac{\pi}{2}$

(1)

与式を行列形式で書き表すと、

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a_n + 1 \\ 3b_n - 17 \end{pmatrix}$$

となる。ここで、

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{-4+1} \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

であるから、

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3a_n + 1 \\ 3b_n - 17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n + \frac{1}{3} \\ b_n - \frac{17}{3} \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} c_{n+1} + a \\ d_{n+1} + b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_n + a + \frac{1}{3} \\ d_n + b - \frac{17}{3} \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} c_{n+1} \\ d_{n+1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_n \\ d_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a + \frac{1}{3} \\ b - \frac{17}{3} \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a + \frac{1}{3} \\ b - \frac{17}{3} \end{pmatrix} \left(\because \begin{pmatrix} c_{n+1} \\ d_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_n \\ d_n \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

となる。したがって、

$$\begin{aligned} &\begin{cases} a = 2a + b - 5 \\ b = -a - 2b + 11 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a + b - 5 = 0 \\ a + 3b - 11 = 0 \end{cases} \\ &\therefore (a, b) = (2, 3) \end{aligned}$$

となる。

(答) $(a, b) = (2, 3)$

(2)

(1)の結果などを利用すると、

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} c_{n+1} \\ d_{n+1} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_n \\ d_n \end{pmatrix} \\ &\Rightarrow \begin{pmatrix} c_n \\ d_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}^{n-1} \begin{pmatrix} c_1 \\ d_1 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_n - a \\ b_n - b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}^{n-1} \begin{pmatrix} a_1 - a \\ b_1 - b \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_n - 2 \\ b_n - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}^{n-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

となる。ここで、 E を2次の単位行列とすると、

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}^{2k} &= \left\{ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \right\}^k \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^k \\ &= 3^k E \end{aligned}$$

となるから、 n が偶数のとき、 $\textcircled{1}$ 式より

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a_n - 2 \\ b_n - 3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}^{n-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= 3^{\frac{n}{2}-1} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= 3^{\frac{n}{2}-1} \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3^{\frac{n}{2}} + 2 \\ -3^{\frac{n}{2}} + 3 \end{pmatrix}$$

となる。同様にして、 n が奇数のとき、

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a_n - 2 \\ b_n - 3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}^{n-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= 3^{\frac{n-1}{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3^{\frac{n-1}{2}} + 2 \\ 3^{\frac{n-1}{2}} + 3 \end{pmatrix}$$

となる。

$$\text{(答) } n \text{ が偶数のとき: } \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3^{\frac{n}{2}} + 2 \\ -3^{\frac{n}{2}} + 3 \end{pmatrix}$$

$$n \text{ が奇数のとき: } \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3^{\frac{n-1}{2}} + 2 \\ 3^{\frac{n-1}{2}} + 3 \end{pmatrix}$$

(1)

上下を逆さまにしても読める順列は、H, I, O, Xの4文字のみを使って作られる順列である。このうち、上下を逆さまにしたときに元の順列と一致するのは、順列の1文字目と5文字目、2文字目と4文字目と同じ文字の場合のみである。よって、求める総数は、順列の1文字目から3文字目をH, I, O, Xの中から重複を認めて選ぶ場合の数に等しいから、

$$4^3 = 64 \text{ (枚)}$$

となる。

(答) 64 枚

(2)

上下を逆さまにしても読める順列の総数は、

$$4^5 = 1024 \text{ (個)}$$

である。したがって、(1)の結果を利用すると、求める総数は

$$1024 - 64 = 960 \text{ (枚)}$$

となる。

(答) 960 枚

(3)

5文字の順列の総数は、

$$10^5 = 100000 \text{ (個)}$$

である。(2)の結果より、上下を逆さまにして読むと異なる順列を表すカードは960枚であるから、これら960個の順列は

$$\frac{960}{2} = 480 \text{ (枚)}$$

のカードで表すことができ、480枚のカードが不要となる。よって、求めるカードの枚数は、

$$100000 - 480 = 99520 \text{ (枚)}$$

となる。

(答) 99520 枚

4

(1)

与式より、

$$\begin{aligned} x &= 2 \cos 2\theta \\ &= 2(2 \cos^2 \theta - 1) \\ &= 4t^2 - 2 \\ y &= 2 \cos 3\theta \\ &= 2(4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta) \\ &= 8t^3 - 6t \end{aligned}$$

となる。

(答) $x = 4t^2 - 2, y = 8t^3 - 6t$

(2)

$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ のとき、 $\cos \theta \geq 0$ より $t \geq 0$ であることに注意すると、

$$\begin{aligned} x &= 4t^2 - 2 \\ \Rightarrow t &= \frac{\sqrt{x+2}}{2} \end{aligned}$$

となる。ここから、

$$\begin{aligned} y &= 8t^3 - 6t \\ &= 2t(4t^2 - 3) \\ &= (x-1)\sqrt{x+2} \end{aligned}$$

となる。同様にして、 $\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi$ のとき、 $\cos \theta \leq 0$ より $t \leq 0$ であるから

$$\begin{aligned} x &= 4t^2 - 2 \\ \Rightarrow t &= -\frac{\sqrt{x+2}}{2} \end{aligned}$$

となり

$$\begin{aligned} y &= 8t^3 - 6t \\ &= 2t(4t^2 - 3) \\ &= -(x-1)\sqrt{x+2} \end{aligned}$$

となる。

(答) $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ のとき: $y = (x-1)\sqrt{x+2}$
 $\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi$ のとき: $y = -(x-1)\sqrt{x+2}$

(3)

$-1 \leq t \leq 1$, $x = 4t^2 - 2$ であるから、 $-2 \leq x \leq 2$ となる。

$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ のとき、 $y = f(x) = (x-1)\sqrt{x+2}$ とおくと、

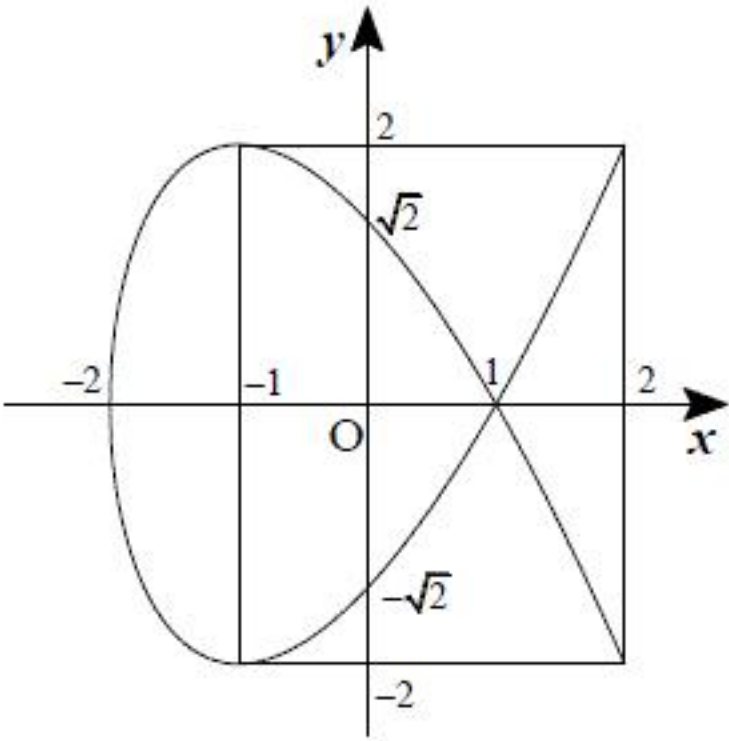
$$\begin{aligned} f'(x) &= \sqrt{x+2} + \frac{x-1}{2\sqrt{x+2}} \\ &= \frac{3(x+1)}{2\sqrt{x+2}} \\ f''(x) &= \frac{3}{2} \cdot \frac{\sqrt{x+2} - \frac{x+1}{2\sqrt{x+2}}}{(x+2)} \\ &= \frac{3(x+3)}{4(x+2)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

となるので、 $f(x)$ の増減は以下の通りである。

x	-2	...	-1	...	2
$f'(x)$		-	0	+	
$f''(x)$		+	+	+	
$f(x)$	0	↘	-2	↗	2

また、 $\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi$ のとき、 $y = -(x-1)\sqrt{x+2} = -f(x)$ であるから、このときの曲線のグラフ

は $y = f(x)$ と x 軸に関して対称になる。したがって、曲線 C の概形は以下の図のようになる。



(答) 前図