

(1)

2 次方程式 $x^2 + 2(n-5)x + n^2 - n = 0$ が実数解を持つとき、判別式は 0 以上となるから、

$$(n-5)^2 - (n^2 - n) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow -9n + 25 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow n \leq \frac{25}{9}$$

となる。 n は 0 以上の整数であるから、求める値は

$$n = 0, 1, 2$$

となる。

(答) $n = 0, 1, 2$

(2)

二桁の自然数を、一桁の自然数 m および一桁の整数 n ($n \geq 0$) を用いて、 $10m + n$ と表す。この自然数が題意を満たすとき、

$$10m + n = (m + n)^2$$

$$\Leftrightarrow m^2 + 2(n-5)m + n^2 - n = 0 \quad \cdots \textcircled{1}$$

となる。①式を m に関する 2 次方程式とみると、 m が実数となるためには、(1)の結果より、

$$n = 0, 1, 2$$

となればよい。このとき①式より

$$m = -n + 5 \pm \sqrt{-9n + 25}$$

となるから、

$$n = 0 \text{ のとき } m = 0, 10$$

$$n = 1 \text{ のとき } m = 0, 8$$

$$n = 2 \text{ のとき } m = 3 \pm \sqrt{7}$$

となる。 m は一桁の自然数であるから、とりうる (m, n) の組は

$$(m, n) = (8, 1)$$

のみであり、求める二桁の自然数は 81 である。

(答) 81

(1)

余弦定理より

$$\begin{aligned}
 \cos A &= \frac{AB^2 + CA^2 - BC^2}{2 \cdot AB \cdot CA} \\
 &= \frac{(\sqrt{6} - \sqrt{2})^2 + (\sqrt{6} + \sqrt{2})^2 - 4^2}{2(\sqrt{6} - \sqrt{2})(\sqrt{6} + \sqrt{2})} \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

となる。 $0 < A < \pi$ であるから、 $A = \frac{\pi}{2}$ となる。

(答) $\frac{\pi}{2}$

(2)

正弦定理より

$$\begin{aligned}
 \sin B &= \frac{\sin A}{BC} \cdot CA \\
 &= \frac{\sin \frac{\pi}{2}}{4} (\sqrt{6} + \sqrt{2}) \\
 &= \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}
 \end{aligned}$$

となる。また、 $A = \frac{\pi}{2}$ より $0 < B < \frac{\pi}{2}$ であることに注意すると

$$\begin{aligned}
 \cos B &= \sqrt{1 - \sin^2 B} \\
 &= \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}\right)^2} \\
 &= \frac{\sqrt{8 - 2\sqrt{12}}}{4} \\
 &= \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}
 \end{aligned}$$

を得る。

(答) $\sin B = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}, \cos B = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

(3)

$$\begin{aligned}
 \sin\left(B + \frac{\pi}{3}\right) &= \sin B \cos \frac{\pi}{3} + \cos B \sin \frac{\pi}{3} \\
 &= \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{8} + \frac{3\sqrt{2} - \sqrt{6}}{8} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}}
 \end{aligned}$$

となる。 $\frac{\pi}{3} < B < \frac{5}{6}\pi$ であるから、

$$\begin{aligned}
 B + \frac{\pi}{3} &= \frac{3}{4}\pi \\
 \Leftrightarrow B &= \frac{5}{12}\pi
 \end{aligned}$$

を得る。

(答) $B = \frac{5}{12}\pi$

(1)

$y = x^2$ より $y' = 2x$ であるから、点 Q における曲線 C の接線の方程式は、

$$\begin{aligned} y &= 2\alpha(x - \alpha) + \alpha^2 \\ &= 2\alpha x - \alpha^2 \end{aligned}$$

となる。同様に、点 R における曲線 C の接線の方程式は $y = 2\beta x - \beta^2$ であり、点 P はこれらの直線の交点であるから、その座標を求めると

$$\begin{aligned} &\begin{cases} y = 2\alpha x - \alpha^2 \\ y = 2\beta x - \beta^2 \end{cases} \\ &\Rightarrow 2\alpha x - \alpha^2 = 2\beta x - \beta^2 \\ &\Leftrightarrow (\alpha - \beta)(2x - \alpha - \beta) = 0 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{\alpha + \beta}{2} (\because \alpha \neq \beta) \\ &\therefore (x, y) = \left(\frac{\alpha + \beta}{2}, \alpha\beta \right) \end{aligned}$$

であり、求める x 座標は $\frac{\alpha + \beta}{2}$ である。

$$(\text{答}) \quad \frac{\alpha + \beta}{2}$$

(2)

点 $P\left(\frac{\alpha + \beta}{2}, \alpha\beta\right)$ は直線 $\ell: y = ax + b$ 上にあるから

$$\alpha\beta = a \cdot \frac{\alpha + \beta}{2} + b \quad \dots \textcircled{1}$$

を満たす。直線 QR の方程式は

$$\begin{aligned} y &= \frac{\beta^2 - \alpha^2}{\beta - \alpha}(x - \alpha) + \alpha^2 \\ &= (\alpha + \beta)x - \alpha\beta \end{aligned}$$

であり、①式を代入して整理すると

$$\begin{aligned} y &= (\alpha + \beta)x - a \cdot \frac{\alpha + \beta}{2} - b \\ &\Leftrightarrow y + b = (\alpha + \beta)\left(x - \frac{a}{2}\right) \end{aligned}$$

となる。よって直線 QR は点 P の位置によらず定点 $\left(\frac{a}{2}, -b\right)$ を通る。

(証明終)

(1)

3回試行を行うとき、一度も4のカードを引かない確率は

$$\left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{27}{64}$$

である。3回試行を繰り返したとき、手元のカードが4である場合は、3回の試行で1度も4のカードを引かない場合の余事象であるから、求める確率は、

$$1 - \frac{27}{64} = \frac{37}{64}$$

となる。同様に考え、 n 回繰り返して手元のカードが4である確率は、

$$1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n$$

となる。

(答) 3回繰り返して手元のカードが4である確率: $\frac{37}{64}$

n 回繰り返して手元のカードが4である確率: $1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n$

(2)

n 回繰り返して手元のカードが2である確率は、 n 回繰り返して2以下のカードを引き続ける確率から、 n 回繰り返して1以下のカードを引き続ける確率を引いたものであるから、

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(\frac{1}{4}\right)^n = \frac{2^n - 1}{4^n}$$

となる。よって、3回繰り返して手元のカードが2である確率は、

$$\frac{2^3 - 1}{4^3} = \frac{7}{64}$$

となる。

(答) 3回繰り返して手元のカードが2である確率: $\frac{7}{64}$

n 回繰り返して手元のカードが2である確率: $\frac{2^n - 1}{4^n}$

(3)

n 回繰り返して手元のカードが1である確率は、

$$\left(\frac{1}{4}\right)^n$$

であるから、(1)、(2)の結果を用いて余事象の確率を考えることにより、求める確率は

$$\begin{aligned} 1 - \left\{ 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n + \frac{2^n - 1}{4^n} + \left(\frac{1}{4}\right)^n \right\} &= \left(\frac{3}{4}\right)^n - \left(\frac{1}{2}\right)^n \\ &= \frac{3^n - 2^n}{4^n} \end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{3^n - 2^n}{4^n}$