

(1)

上下を逆さまにしても読める順列は、H, I, O, X の4文字のみを使って作られる順列である。このうち、上下を逆さまにしたときに元の順列と一致するのは、順列の1文字目と5文字目、2文字目と4文字目が同じ文字の場合のみである。よって、求める総数は、順列の1文字目から3文字目をH, I, O, Xの中から重複を認めて選ぶ場合の数に等しいから、

$$4^3 = 64 \text{ (枚)}$$

となる。

(答) 64 枚

(2)

上下を逆さまにしても読める順列の総数は、

$$4^5 = 1024 \text{ (個)}$$

である。したがって、(1)の結果を利用すると、求める総数は

$$1024 - 64 = 960 \text{ (枚)}$$

となる。

(答) 960 枚

(3)

5文字の順列の総数は、

$$10^5 = 100000 \text{ (個)}$$

である。(2)の結果より、上下を逆さまにして読むと異なる順列を表すカードは960枚であるから、これら960個の順列は

$$\frac{960}{2} = 480 \text{ (枚)}$$

のカードで表すことができ、480枚のカードが不要となる。よって、求めるカードの枚数は、

$$100000 - 480 = 99520 \text{ (枚)}$$

となる。

(答) 99520 枚

2

(1)

$t = \cos \theta$ とおくと、与式より、

$$\begin{aligned} x &= 2 \cos 2\theta \\ &= 2(2 \cos^2 \theta - 1) \\ &= 4t^2 - 2 \\ y &= 2 \cos 3\theta \\ &= 2(4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta) \\ &= 8t^3 - 6t \end{aligned}$$

となる。 $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ のとき、 $\cos \theta \geq 0$ より $t \geq 0$ であることに注意すると、

$$\begin{aligned} x &= 4t^2 - 2 \\ \Rightarrow t &= \frac{\sqrt{x+2}}{2} \end{aligned}$$

となる。ここから、

$$\begin{aligned} y &= 8t^3 - 6t \\ &= 2t(4t^2 - 3) \\ &= (x-1)\sqrt{x+2} \end{aligned}$$

となる。同様にして、 $\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi$ のとき、 $\cos \theta \leq 0$ より $t \leq 0$ であるから

$$\begin{aligned} x &= 4t^2 - 2 \\ \Rightarrow t &= -\frac{\sqrt{x+2}}{2} \end{aligned}$$

となり

$$\begin{aligned} y &= 8t^3 - 6t \\ &= 2t(4t^2 - 3) \\ &= -(x-1)\sqrt{x+2} \end{aligned}$$

となる。

(答) $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ のとき: $y = (x-1)\sqrt{x+2}$

$\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi$ のとき: $y = -(x-1)\sqrt{x+2}$

(2)

$-1 \leq t \leq 1$, $x = 4t^2 - 2$ であるから、 $-2 \leq x \leq 2$ となる。

$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ のとき、 $y = f(x) = (x-1)\sqrt{x+2}$ とおくと、

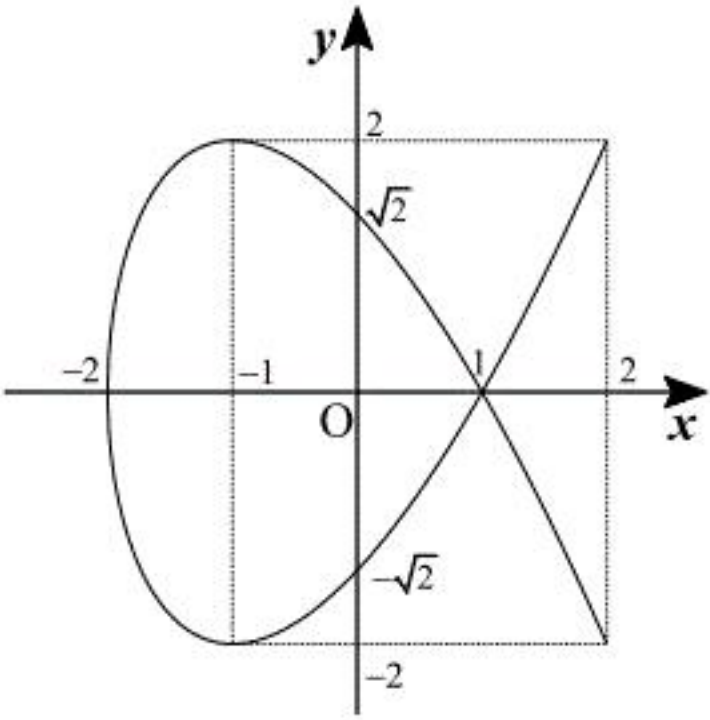
$$\begin{aligned} f'(x) &= \sqrt{x+2} + \frac{x-1}{2\sqrt{x+2}} \\ &= \frac{3(x+1)}{2\sqrt{x+2}} \\ f''(x) &= \frac{3}{2} \cdot \frac{\sqrt{x+2} - \frac{x+1}{2\sqrt{x+2}}}{(x+2)} \\ &= \frac{3(x+3)}{4(x+2)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

となるので、 $f(x)$ の増減は以下の通りである。

x	-2	...	-1	...	2
$f'(x)$		-	0	+	
$f''(x)$		+	+	+	
$f(x)$	0		-2		2

また、 $\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi$ のとき、 $y = -(x-1)\sqrt{x+2} = -f(x)$ であるから、このときの曲線のグラフ

は $y = f(x)$ と x 軸に関して対称になる。したがって、曲線 C の概形は以下の図のようになる。



(答) 前図

(3)

前図より、 C が囲む領域は x 軸に関して対称である。よって、求める面積は

$$\begin{aligned} -2 \int_{-2}^1 (x-1)\sqrt{x+2} dx &= -2 \int_{-2}^1 \left\{ (x+2)^{\frac{3}{2}} - 3\sqrt{x+2} \right\} dx \\ &= -2 \left[\frac{2}{5} (x+2)^{\frac{5}{2}} - 2(x+2)^{\frac{3}{2}} \right]_{-2}^1 \\ &= 12\sqrt{3} - \frac{36}{5}\sqrt{3} \\ &= \frac{24}{5}\sqrt{3} \end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{24}{5}\sqrt{3}$

(1)

まず任意のベクトルと行列 $\vec{c} = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$, $\vec{d} = \begin{pmatrix} g \\ h \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} i & j \\ k & l \end{pmatrix}$ について

$$\begin{aligned}\vec{c} \cdot (B\vec{d}) &= \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} gi + hj \\ gk + hl \end{pmatrix} \\ &= egi + ehj + fgk + fhl \\ &= \begin{pmatrix} ei + fk \\ ej + fl \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} g \\ h \end{pmatrix} \\ &= B' \vec{c} \cdot \vec{d}\end{aligned}$$

となる。ただし B' は行列 B の転置行列を表す。これを用いると

$$\begin{aligned}A\vec{u} \cdot \vec{v} &= \vec{u} \cdot A' \vec{v} \\ \Leftrightarrow \alpha \vec{u} \cdot \vec{v} &= \beta \vec{u} \cdot \vec{v} (\because A' = A) \\ \Leftrightarrow (\alpha - \beta) \vec{u} \cdot \vec{v} &= 0 \\ \therefore \vec{u} \cdot \vec{v} &= 0 (\because \alpha \neq \beta)\end{aligned}$$

となり, $|\vec{u}| = |\vec{v}| = 1$ であるから, 二つのベクトル $\vec{u}, \vec{v}$ は直交することが示された。

(証明終)

(2)

$$\begin{aligned}(ps - qr)^2 &= (p^2 + q^2)(s^2 + r^2) - (pr + qs)^2 \\ &= |\vec{u}|^2 \cdot |\vec{v}|^2 - 0^2 \\ &= 1 \\ \therefore ps - qr &\neq 0\end{aligned}$$

となる。よって行列 X は逆行列を持つことが示された。

(証明終)

(3)

与式より

$$\begin{aligned}AX &= \begin{pmatrix} \alpha p & \beta r \\ \alpha q & \beta s \end{pmatrix} \\ &= X \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}\end{aligned}$$

となることが示された。

(証明終)

(4)

(2)より X は逆行列をもち, X^{-1} とおく。(3)より

$$\begin{aligned}X^{-1}AX &= \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \\ \Rightarrow X^{-1}AXX^{-1}AXX^{-1} \cdots AX &= \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}^n \\ \Leftrightarrow X^{-1}A^nX &= \begin{pmatrix} \alpha^n & 0 \\ 0 & \beta^n \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow A^n &= X \begin{pmatrix} \alpha^n & 0 \\ 0 & \beta^n \end{pmatrix} X^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} p & r \\ q & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha^n & 0 \\ 0 & \beta^n \end{pmatrix} \frac{1}{ps - qr} \begin{pmatrix} s & -r \\ -q & p \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{ps - qr} \begin{pmatrix} ps\alpha^n - qr\beta^n & pr(\beta^n - \alpha^n) \\ qs(\alpha^n - \beta^n) & ps\beta^n - qr\alpha^n \end{pmatrix}\end{aligned}$$

となる。よって

$$\begin{aligned}f_n + k_n &= \frac{1}{ps - qr} (ps\alpha^n - qr\beta^n + ps\beta^n - qr\alpha^n) \\ &= \alpha^n + \beta^n\end{aligned}$$

となる。

(答) $f_n + k_n = \alpha^n + \beta^n$

(1)

$$\begin{aligned}
 v(x) &= \int_0^x e^t (x-t) dt \\
 &= x \int_0^x e^t dt - \int_0^x t e^t dt \\
 &= x e^x - x - \left[t e^t \right]_0^x + \int_0^x e^t dt \\
 &= e^x - x - 1
 \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad v(x) = e^x - x - 1$$

(2)

$x-t=l$ とおくと, $dt = -dl$ より

$$\begin{aligned}
 v(x) &= - \int_x^0 e^{x-l} f(l) dl \\
 &= e^x \int_0^x e^{-l} f(l) dl
 \end{aligned}$$

となるから

$$\begin{aligned}
 v'(x) &= e^x \int_0^x e^{-l} f(l) dl + e^x \cdot e^{-x} f(x) \\
 &= v(x) + f(x) \\
 &= \sin^4 x
 \end{aligned}$$

となる。よって

$$\begin{aligned}
 v(x) &= \int \sin^4 x dx \\
 &= \int \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right)^2 dx \\
 &= \frac{1}{4} \int (\cos^2 2x - 2 \cos 2x + 1) dx \\
 &= \frac{1}{4} \int \frac{1 + \cos 4x}{2} dx - \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{4} x + C \\
 &= \frac{1}{32} \sin 4x - \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{3}{8} x + C
 \end{aligned}$$

となる。ただし C は積分定数である。ここで与式より $v(0) = 0$ であるから, $C = 0$ となり,

$$v(x) = \frac{1}{32} \sin 4x - \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{3}{8} x$$

を得る。

$$(\text{答}) \quad v(x) = \frac{1}{32} \sin 4x - \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{3}{8} x$$

(3)

(2)の結果より,

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \sin^4 x - v(x) \\
 &= \sin^4 x - \frac{1}{32} \sin 4x + \frac{1}{4} \sin 2x - \frac{3}{8} x
 \end{aligned}$$

となるから

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^4 x - \frac{1}{32} \sin 4x + \frac{1}{4} \sin 2x - \frac{3}{8} x}{x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \left(\frac{\sin x}{x} \right)^4 \cdot x^3 - \frac{1}{8} \left(\frac{\sin 4x}{4x} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\sin 2x}{2x} \right) - \frac{3}{8} \right\} \\
 &= 0 - \frac{1}{8} + \frac{1}{2} - \frac{3}{8} \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0$$