

(1)

等差数列 $\{a_n\}$ の公差を d とする。このとき、

$$a_{11} = a_1 + 10d = \frac{1}{6} + 10d$$

$$a_{40} = a_1 + 39d = \frac{1}{6} + 39d$$

であり、与式より、

$$\sum_{k=1}^{40} a_k = 250$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot 30 \cdot (a_{11} + a_{40}) = 250$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot 30 \cdot \left\{ \left(\frac{1}{6} + 10d \right) + \left(\frac{1}{6} + 39d \right) \right\} = 250$$

$$\therefore d = \frac{1}{3}$$

を得る。よって、等差数列 $\{a_n\}$ の一般項は、

$$a_n = \frac{1}{6} + (n-1) \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3}n - \frac{1}{6}$$

である。

$$(\text{答}) \quad a_n = \frac{1}{3}n - \frac{1}{6}$$

(2)

(1)より、

$$a_n \leq 10$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3}n - \frac{1}{6} \leq 10$$

$$\Leftrightarrow n \leq 30.5$$

となる。よって、上不等式を満たす n の最大値 N は 30 である。

$$(\text{答}) \quad N = 30$$

(3)

(2)より、 $N = 30$ であるため、

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^N a_k &= \sum_{k=1}^{30} \left(\frac{1}{3}k - \frac{1}{6} \right) \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 30 \cdot 31 - \frac{1}{6} \cdot 30 \\ &= 150 \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad 150$$

(1)

$\vec{n}$ は平面 α に垂直であるため、

$$\vec{n} \perp \overrightarrow{AB}, \vec{n} \perp \overrightarrow{AC}$$

である。したがって、

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$$

$$\Leftrightarrow (n_1, n_2, n_3) \cdot (-a, b, 0) = 0$$

$$\therefore n_2 = \frac{a}{b} n_1 \quad (\because b > 0) \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$$

$$\Leftrightarrow (n_1, n_2, n_3) \cdot (-a, 0, c) = 0$$

$$\therefore n_3 = \frac{a}{c} n_1 \quad (\because c > 0) \quad \dots \textcircled{2}$$

を得る。また、 $\vec{n}$ は単位ベクトルであるため、

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1 \quad \dots \textcircled{3}$$

であり、①と②を③に代入して整理することにより、

$$n_1^2 + \left(\frac{a}{b} n_1\right)^2 + \left(\frac{a}{c} n_1\right)^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow n_1^2 = \frac{b^2 c^2}{a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2}$$

$$\therefore n_1 = \frac{bc}{\sqrt{a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2}} \quad (\because n_1, a, b, c > 0)$$

となる。したがって、これと①、②より、

$$\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2}} (bc, ca, ab)$$

である。

$$(\text{答}) \quad \vec{n} = \frac{1}{\sqrt{a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2}} (bc, ca, ab)$$

(2)

点 H は平面 α 上にあるため、実数 p, q, r を用いて、

$$\overrightarrow{OH} = p\overrightarrow{OA} + q\overrightarrow{OB} + r\overrightarrow{OC} = (ap, bq, cr) \quad \dots \textcircled{4}$$

と表せる。ただし、

$$p + q + r = 1 \quad \dots \textcircled{5}$$

である。また、直線 OH は α に垂直であることから、実数 k を用いて、

$$\overrightarrow{OH} = k\vec{n} = \frac{k}{\sqrt{a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2}} (bc, ca, ab) \quad \dots \textcircled{6}$$

とも表せる。よって、④と⑥より、

$$\begin{cases} ap = \frac{bc}{\sqrt{a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2}} k \\ bq = \frac{ca}{\sqrt{a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2}} k \\ cr = \frac{ab}{\sqrt{a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2}} k \end{cases}$$

$$\therefore q = \frac{a^2}{b^2} p, r = \frac{a^2}{c^2} p \quad (\because b, c > 0) \quad \dots \textcircled{7}$$

となり、これらを⑤に代入することで、

$$p + \frac{a^2}{b^2} p + \frac{a^2}{c^2} p = 1$$

$$\therefore p = \frac{b^2 c^2}{a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2}$$

を得る。したがって、これと④、⑦より、

$$\overrightarrow{OH} = \frac{abc}{a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2} (bc, ca, ab)$$

である。また、

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{OH}| &= \frac{abc}{a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2} \sqrt{b^2 c^2 + c^2 a^2 + a^2 b^2} \\ &= \frac{abc}{\sqrt{a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2}} \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \begin{cases} \overrightarrow{OH} = \frac{abc}{a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2} (bc, ca, ab) \\ |\overrightarrow{OH}| = \frac{abc}{\sqrt{a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2}} \end{cases}$$

(3)

四面体 OABC の体積を V とすると、 S, S_1 を用いて

$$V = \frac{1}{3} \cdot |\overrightarrow{OH}| \cdot S$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot |\overrightarrow{OA}| \cdot S_1$$

と 2 通りに表せる。よって、(2) より、

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{abc}{\sqrt{a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2}} \cdot S = \frac{1}{3} \cdot a \cdot S_1$$

$$\Leftrightarrow S_1 = \frac{bc}{\sqrt{a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2}} S$$

$$\therefore S_1 = n_1 S$$

となり、 $S_1 = n_1 S$ となることが示せた。

(証明終)

(1)

与式より,

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{13}{4}$$

$$\Leftrightarrow 1 - a + \frac{21}{4} = \frac{13}{4} \left(\because \sin \frac{\pi}{2} = 1, \cos \pi = -1 \right)$$

$$\therefore a = 3$$

を得る。

(答) $a = 3$

(2)

(1)より, 関数 $f(\theta)$ は, 2倍角の公式を用いて

$$f(\theta) = \sin^3 \theta + 3 \cos 2\theta + \frac{21}{4} \sin \theta$$

$$= \sin^3 \theta + 3(1 - 2 \sin^2 \theta) + \frac{21}{4} \sin \theta$$

$$= \sin^3 \theta - 6 \sin^2 \theta + \frac{21}{4} \sin \theta + 3$$

と変形できる。よって, $t = \sin \theta$ とおくとき,

$$f(\theta) = t^3 - 6t^2 + \frac{21}{4}t + 3$$

となる。

$$(答) f(\theta) = t^3 - 6t^2 + \frac{21}{4}t + 3$$

(3)

(2)より,

$$g(t) = t^3 - 6t^2 + \frac{21}{4}t + 3$$

とおく。このとき, 関数 $g(t)$ を t で微分すると,

$$g'(t) = 3t^2 - 12t + \frac{21}{4} = \frac{3}{4}(2t - 7)(2t - 1)$$

となるため, $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow -1 \leq t \leq 1$ であることを考慮して, $t = \frac{1}{2}$ のとき $g'(t) = 0$ となる
ことが分かる。よって, 関数 $g(t)$ に関する増減表は以下のようになる。

t	-1	...	$\frac{1}{2}$	...	1
$g'(t)$	+	+	0	-	-
$g(t)$	$-\frac{37}{4}$	$\nearrow$	$\frac{17}{4}$	$\searrow$	$\frac{13}{4}$

上表より, $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ の範囲に注意して, $f(\theta)$ は $t = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{6}$ のときに最大値 $\frac{17}{4}$ をとり,

$t = -1 \Leftrightarrow \theta = -\frac{\pi}{2}$ のときに最小値 $-\frac{37}{4}$ をとる。

$$(答) \begin{cases} \text{最大値: } \frac{17}{4} \quad (\theta = \frac{\pi}{6} \text{ のとき}) \\ \text{最小値: } -\frac{37}{4} \quad (\theta = -\frac{\pi}{2} \text{ のとき}) \end{cases}$$