

1

$$f(x) = \begin{cases} x(5-x) & (x \geq 0) \\ x(x^2-1) & (x < 0) \end{cases} \quad \begin{matrix} \cdots \textcircled{1} \\ \cdots \textcircled{2} \end{matrix}$$

$$y = ax \quad \cdots \textcircled{3}$$

(1)

①と③の交点の x 座標は,

$$\begin{aligned} x(5-x) &= ax \\ \Leftrightarrow x(x+a-5) &= 0 \\ \therefore x &= 0, 5-a \end{aligned}$$

である。点 P の x 座標は正なので,

$$\begin{aligned} 5-a &> 0 \\ \Leftrightarrow a &< 5 \end{aligned}$$

である。②と③の交点の x 座標は,

$$\begin{aligned} x(x^2-1) &= ax \\ \Leftrightarrow x(x^2-1-a) &= 0 \\ \therefore x &= 0, x^2 = a+1 \end{aligned}$$

を満たす。点 Q が存在し、かつその x 座標が負となるとき,

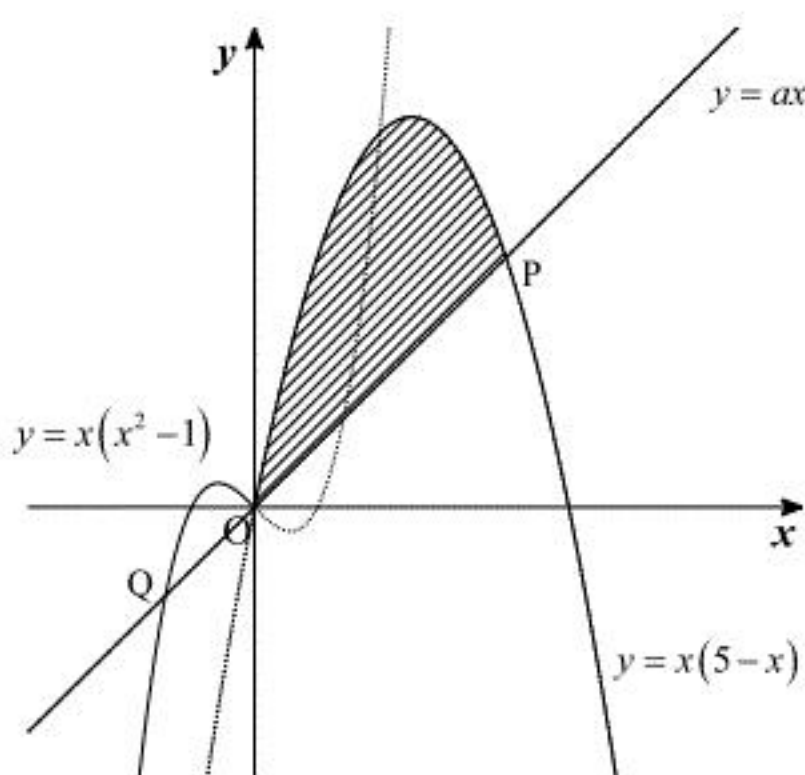
$$\begin{aligned} a+1 &> 0 \\ \Leftrightarrow a &> -1 \end{aligned}$$

である。以上より、求める a の値の範囲は $-1 < a < 5$ である。

(答) $-1 < a < 5$

(2)

$S_1(a)$ は下図の斜線部の面積である。



よって、上図より、 $\frac{1}{6}$ 公式を用いて

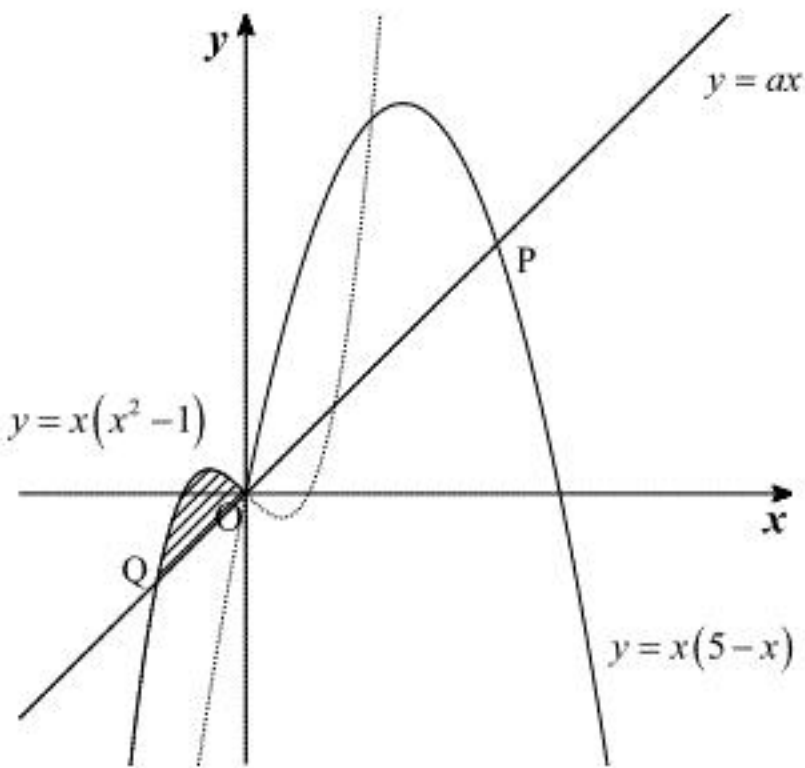
$$\begin{aligned} S_1(a) &= \int_0^{5-a} \{x(5-x) - ax\} dx \\ &= -\int_0^{5-a} x\{x - (5-a)\} dx \\ &= \frac{1}{6}(5-a)^3 \end{aligned}$$

となる。

(答) $S_1(a) = \frac{1}{6}(5-a)^3$

(3)

$S_2(a)$ は下図の斜線部の面積である。



よって、上図より、

$$\begin{aligned} S_2(a) &= \int_{-\sqrt{a+1}}^0 \{x(x^2-1) - ax\} dx \\ &= \int_{-\sqrt{a+1}}^0 \{x^3 - (a+1)x\} dx \\ &= \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{a+1}{2}x^2 \right]_{-\sqrt{a+1}}^0 \\ &= \frac{1}{4}(a+1)^2 \end{aligned}$$

となる。

(答) $S_2(a) = \frac{1}{4}(a+1)^2$

(4)

(2), (3)より、

$$S(a) = \frac{1}{6}(5-a)^3 + \frac{1}{4}(a+1)^2$$

であり、

$$\begin{aligned} S'(a) &= -\frac{1}{2}(5-a)^2 + \frac{1}{2}(a+1) \\ &= -\frac{1}{2}(a-3)(a-8) \end{aligned}$$

となる。(1)より、 $-1 < a < 5$ であるため、 $a=3$ のとき $S'(a)=0$ となる。よって、 $S(a)$ に関する増減表は以下になる。

a	-1	...	3	...	5
$S'(a)$	$\nearrow$	-	0	+	$\nearrow$
$S(a)$	$\nearrow$	$\searrow$	最小値	$\nearrow$	$\nearrow$

上表より、 $a=3$ のとき $S(a)$ は最小値

$$S(3) = \frac{1}{6} \cdot 2^3 + \frac{1}{4} \cdot 4^2 = \frac{16}{3}$$

をとる。

(答) $\frac{16}{3}$

(1)

接点の x 座標を $t (> 0)$ とする。

$$f(x) = ax + b$$

$$g(x) = \log x$$

とおくと、 $y = f(x)$ と $y = g(x)$ は $x = t$ で接するから、 $a, t > 0$ に注意して

$$\begin{cases} f(t) = g(t) \\ f'(t) = g'(t) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} at + b = \log t \\ a = \frac{1}{t} \end{cases}$$

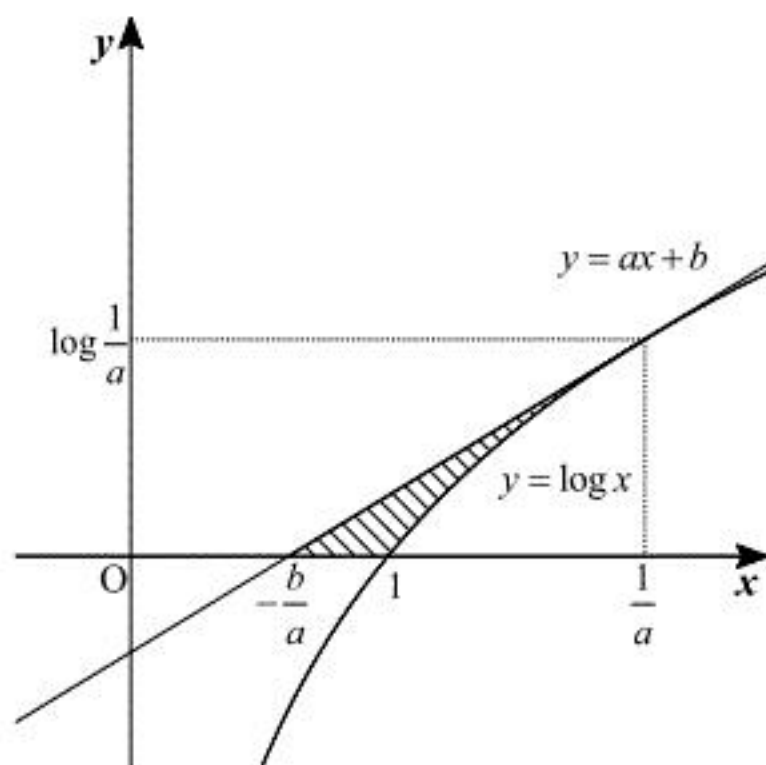
$$\therefore b = -1 - \log a$$

となる。

(答) $b = -1 - \log a$

(2)

$0 < a < 1$ のとき、 $t = \frac{1}{a} > 1$ である。よって、求める図形の面積 S は以下の斜線部となる。



上図より、

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{a} + \frac{b}{a} \right) \cdot \log \frac{1}{a} - \int_1^{\frac{1}{a}} \log x dx \\ &= \frac{(\log a)^2}{2a} - [x \log x - x]_1^{\frac{1}{a}} \\ &= \frac{(\log a)^2}{2a} + \frac{\log a}{a} + \frac{1}{a} - 1 \end{aligned}$$

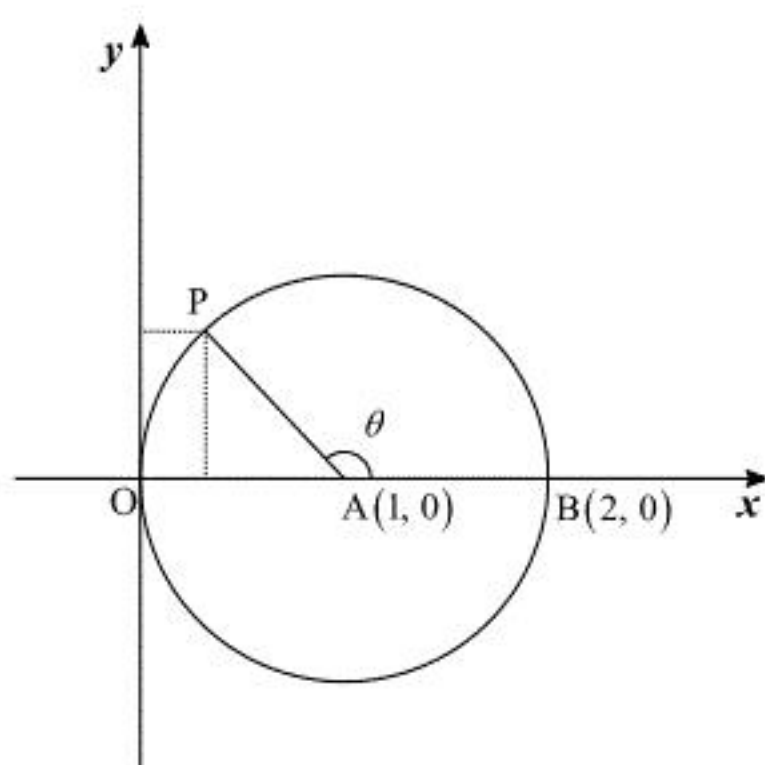
となる。

(答) $S = \frac{(\log a)^2}{2a} + \frac{\log a}{a} + \frac{1}{a} - 1$

3

(1)

xy 平面は下図のようになる。



円の半径は1であるため、

$$\overrightarrow{AP} = (\cos \theta, \sin \theta, 0)$$

である。よって、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP} \\ &= (1, 0, 0) + (\cos \theta, \sin \theta, 0) \\ &= (1 + \cos \theta, \sin \theta, 0)\end{aligned}$$

となる。

(答) $P(1 + \cos \theta, \sin \theta, 0)$

(2)

(1)より、

$$\overrightarrow{CP} = (\cos \theta, \sin \theta, -1)$$

となる。点Qは直線CP上の点であるため、実数 t を用いて、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OQ} &= \overrightarrow{OC} + t\overrightarrow{CP} \\ &= (1 + t \cos \theta, t \sin \theta, 1 - t)\end{aligned}$$

と表せる。また、点Qは yz 平面上の点であるため、 $\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3}{2}\pi$ より $\cos \theta \neq 0$ であることに注意して

$$\begin{aligned}1 + t \cos \theta &= 0 \\ \therefore t &= -\frac{1}{\cos \theta}\end{aligned}$$

となる。以上より、点Qの座標は、 $Q\left(0, -\tan \theta, 1 + \frac{1}{\cos \theta}\right)$ である。

(答) $Q\left(0, -\tan \theta, 1 + \frac{1}{\cos \theta}\right)$

(3)

点 $Q(0, Y, Z)$ とおくと、(2)より、

$$\begin{aligned}&\begin{cases} Y = -\tan \theta \\ Z = 1 + \frac{1}{\cos \theta} \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} \tan \theta = -Y \\ \frac{1}{\cos \theta} = Z - 1 \end{cases}\end{aligned}$$

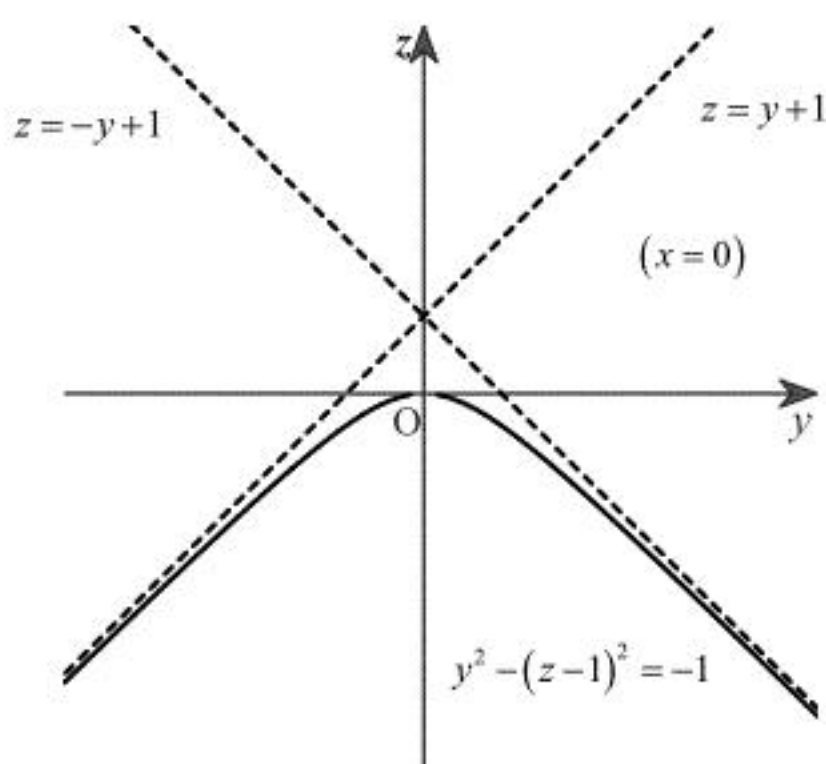
となる。よって、三角関数の公式より、

$$\begin{aligned}1 + \tan^2 \theta &= \frac{1}{\cos^2 \theta} \\ \Leftrightarrow 1 + Y^2 &= (Z - 1)^2 \\ \therefore Y^2 - (Z - 1)^2 &= -1\end{aligned}$$

を得る。ただし、 $\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3}{2}\pi$ より、 Y, Z の区間はそれぞれ $(-\infty, +\infty), (-\infty, 0]$ である。以上より、点Qの軌跡の方程式は、

$$x = 0, y^2 - (z - 1)^2 = -1 \quad (z \leq 0)$$

であり、図示すると以下のようになる。



(答) 点Qの軌跡： $x = 0, y^2 - (z - 1)^2 = -1 \quad (z \leq 0)$, 図示：前図

(1)

硬貨を2回投げ終えた時点で点Pが頂点Aに到達する確率は、2回とも裏が出る確率であるため、

$$p_2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

である。また、硬貨を3回投げ終えた時点で点Pが頂点Aに到達する確率は、頂点Dにとまらないことに注意すると、初めの2回で表が出た後に裏が出る確率であるため、

$$p_3 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

である。

$$(\text{答}) \quad p_2 = \frac{1}{4}, p_3 = \frac{1}{8}$$

(2)

頂点Aを出発して、点Pが再び頂点Aに到達する硬貨の出方は、(1)の2通りのみである。よって、

$$p_4 = p_2 \times p_2 = \frac{1}{16}$$

$$p_5 = p_2 \times p_3 + p_3 \times p_2 = \frac{1}{16}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad p_4 = \frac{1}{16}, p_5 = \frac{1}{16}$$

(3)

硬貨を12回投げ終えた時点で点Pが頂点Aに到達するのは、

(p_2 が6回続くとき)または

(p_2 が3回、 p_3 が2回出るとき)または

(p_3 が4回続くとき)

である。よって、

$$\begin{aligned} p_{12} &= p_2^6 + {}_5C_3 \cdot p_2^3 \cdot p_3^2 + p_3^4 \\ &= \left(\frac{1}{4}\right)^6 + 10 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^2 + \left(\frac{1}{8}\right)^4 \\ &= \frac{1+10+1}{2^{12}} \\ &= \frac{12}{2^{12}} \\ &= \frac{3}{1024} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad p_{12} = \frac{3}{1024}$$