

(1)

$$\begin{aligned}
 a_{n+2} &= (1-p)a_{n+1} + pa_n \\
 \Leftrightarrow a_{n+2} - a_{n+1} &= -p(a_{n+1} - a_n) \\
 \Leftrightarrow b_{n+1} &= -pb_n
 \end{aligned}$$

と変形できる。数列 $\{b_n\}$ は初項 $b_1 = a_2 - a_1 = 1$ 、公比 $-p$ の等比数列であるから、一般項は、

$$\begin{aligned}
 b_n &= 1 \cdot (-p)^{n-1} \\
 &= (-p)^{n-1}
 \end{aligned}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad b_n = (-p)^{n-1}$$

(2)

数列 $\{b_n\}$ は数列 $\{a_n\}$ の階差数列であるため、(1)の結果より、 $n \geq 2$ のとき、 $0 < p < 1$ より $-p \neq 1$ であるから

$$\begin{aligned}
 a_n &= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} (-p)^{k-1} \\
 &= 1 + \frac{1 - (-p)^{n-1}}{1 - (-p)} \\
 &= \frac{2 + p - (-p)^{n-1}}{1 + p}
 \end{aligned}$$

が成り立つ。 $a_1 = 1$ より、これは $n = 1$ のときも成り立つ。

$$(\text{答}) \quad a_n = \frac{2 + p - (-p)^{n-1}}{1 + p}$$

(3)

$0 < p < 1$ より、 $-1 < -p < 0$ であるから、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (-p)^{n-1} = 0$$

である。したがって、

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + p - (-p)^{n-1}}{1 + p} \\
 &= \frac{2 + p}{1 + p}
 \end{aligned}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad \frac{2 + p}{1 + p}$$

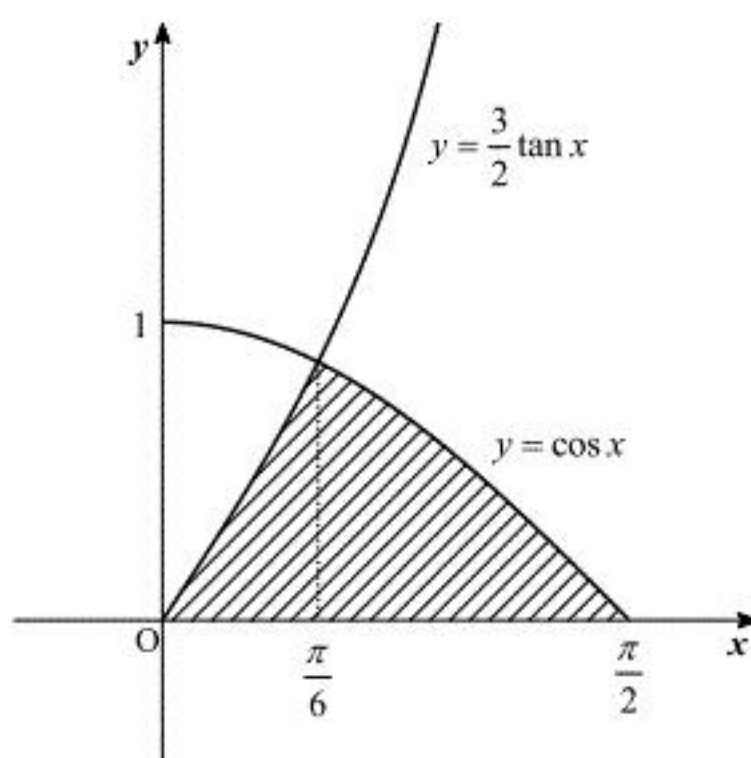
(1)

$$\begin{aligned}\int \tan^2 x dx &= \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx \\ &= \tan x - x + C \quad (C \text{ は積分定数})\end{aligned}$$

である。

(答) $\tan x - x + C$ (C は積分定数)

(2)



2つの曲線と x 軸に囲まれる図形は上図の斜線部である。また、 $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$ に注意すると、

$y = \frac{3}{2}\tan x$ と $y = \cos x$ の共有点の x 座標は、

$$\begin{aligned}\frac{3}{2}\tan x &= \cos x \\ \Leftrightarrow \frac{3 \sin x}{2 \cos x} &= \cos x \\ \Leftrightarrow \frac{3}{2}\sin x &= \cos^2 x \quad (\because \cos x \neq 0) \\ \Leftrightarrow \frac{3}{2}\sin x &= 1 - \sin^2 x \\ \Leftrightarrow 2\sin^2 x + 3\sin x - 2 &= 0 \\ \Leftrightarrow (\sin x + 2)(2\sin x - 1) &= 0 \\ \Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{2} \quad (\because 0 \leq \sin x < 1) \\ \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} \quad \left(\because 0 \leq x < \frac{\pi}{2} \right)\end{aligned}$$

である。したがって、求める体積は、

$$\begin{aligned}&\pi \int_0^{\frac{\pi}{6}} \left(\frac{3}{2}\tan x \right)^2 dx + \pi \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx \\ &= \frac{9}{4}\pi \int_0^{\frac{\pi}{6}} \tan^2 x dx + \frac{\pi}{2} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2x) dx \\ &= \frac{9}{4}\pi \left[\tan x - x \right]_0^{\frac{\pi}{6}} + \frac{\pi}{2} \left[x + \frac{1}{2}\sin 2x \right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{9}{4}\pi \left(\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{\pi}{6} \right) + \frac{\pi}{2} \left\{ \frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{6} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right\} \\ &= \frac{5\sqrt{3}}{8}\pi - \frac{5}{24}\pi^2\end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{5\sqrt{3}}{8}\pi - \frac{5}{24}\pi^2$

(1)

$\bar{z} = r\{\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)\}$ であるから,

$$\begin{aligned} -\bar{z} &= (\cos \pi + i\sin \pi) \cdot r\{\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)\} \\ &= r\{\cos(\pi - \theta) + i\sin(\pi - \theta)\} \end{aligned}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad r\{\cos(\pi - \theta) + i\sin(\pi - \theta)\}$$

(2)

ド・モアブルの定理より,

$$\begin{aligned} \frac{1}{z^2} &= \{r(\cos \theta + i\sin \theta)\}^{-2} \\ &= \frac{1}{r^2} \{\cos(-2\theta) + i\sin(-2\theta)\} \end{aligned}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad \frac{1}{r^2} \{\cos(-2\theta) + i\sin(-2\theta)\}$$

(3)

$|z| = r$ であるから,

$$\begin{aligned} z - |z| &= r\{(\cos \theta - 1) + i\sin \theta\} \\ &= r\left(-2\sin^2 \frac{\theta}{2} + i \cdot 2\sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}\right) \\ &= 2r\sin \frac{\theta}{2} \left(-\sin \frac{\theta}{2} + i\cos \frac{\theta}{2}\right) \\ &= 2r\sin \frac{\theta}{2} \left\{\cos\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{2}\right)\right\} \end{aligned}$$

と求まる。 $0 \leq \theta < 2\pi$ より $2r\sin \frac{\theta}{2} \geq 0$ であるからこれは極形式である。

$$(\text{答}) \quad 2r\sin \frac{\theta}{2} \left\{\cos\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{2}\right)\right\}$$

(1)

5枚のカードから4枚を選び並べるとき並べ方の総数は、

$${}_5P_4 = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120 \text{ (通り)}$$

である。

(答) 120 通り

(2)

題意を満たす4つの数の選び方は $(1, 3, 4, 5)$, $(2, 3, 4, 5)$ の2通りであり、4つの数の引き方は問題文の条件から4通りである。よって、3と4のカードを捨てる場合は

$$2 \cdot 4 = 8 \text{ (通り)}$$

である。

(答) 8 通り

(3)

4つの数の引き方は $4! = 24$ (通り)であり、そのうちカードが捨てられる引き方は問題文の条件から4通りである。よって、求める確率は余事象を利用して

$$1 - \frac{4}{24} = \frac{5}{6}$$

である。

(答) $\frac{5}{6}$