

(1)

$$\begin{aligned}
 a_{n+2} &= (1-p)a_{n+1} + pa_n \\
 \Leftrightarrow a_{n+2} - a_{n+1} &= -p(a_{n+1} - a_n) \\
 \Leftrightarrow b_{n+1} &= -pb_n
 \end{aligned}$$

と変形できる。数列 $\{b_n\}$ は初項 $b_1 = a_2 - a_1 = 1$ 、公比 $-p$ の等比数列であるから、一般項は、

$$\begin{aligned}
 b_n &= 1 \cdot (-p)^{n-1} \\
 &= (-p)^{n-1}
 \end{aligned}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad b_n = (-p)^{n-1}$$

(2)

数列 $\{b_n\}$ は数列 $\{a_n\}$ の階差数列であるため、(1)の結果より、 $n \geq 2$ のとき、 $0 < p < 1$ より $-p \neq 1$ であるから

$$\begin{aligned}
 a_n &= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} (-p)^{k-1} \\
 &= 1 + \frac{1 - (-p)^{n-1}}{1 - (-p)} \\
 &= \frac{2 + p - (-p)^{n-1}}{1 + p}
 \end{aligned}$$

が成り立つ。 $a_1 = 1$ より、これは $n = 1$ のときも成り立つ。

$$(\text{答}) \quad a_n = \frac{2 + p - (-p)^{n-1}}{1 + p}$$

(1)

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{AB} &= (7, 0, 9) - (1, 2, 6) \\
 &= (6, -2, 3) \\
 \overrightarrow{AC} &= (s, t, 0) - (1, 2, 6) \\
 &= (s-1, t-2, -6)
 \end{aligned}$$

であるので,

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} &= (6, -2, 3) \cdot (s-1, t-2, -6) \\
 &= 6(s-1) + (-2) \cdot (t-2) + 3 \cdot (-6) \\
 &= 6s - 2t - 20
 \end{aligned}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 6s - 2t - 20$$

(2)

$$\begin{aligned}
 |\overrightarrow{AB}|^2 &= 6^2 + (-2)^2 + 3^2 \\
 &= 49 \\
 |\overrightarrow{AC}|^2 &= (s-1)^2 + (t-2)^2 + (-6)^2 \\
 &= s^2 - 2s + t^2 - 4t + 41
 \end{aligned}$$

であるので,

$$\begin{aligned}
 |\overrightarrow{AB}| &= |\overrightarrow{AC}| \\
 \Leftrightarrow |\overrightarrow{AB}|^2 &= |\overrightarrow{AC}|^2 \\
 \Leftrightarrow 49 &= s^2 - 2s + t^2 - 4t + 41 \\
 \therefore s^2 - 2s + t^2 - 4t - 8 &= 0
 \end{aligned}$$

と求める関係式を得る。

$$(\text{答}) \quad s^2 - 2s + t^2 - 4t - 8 = 0$$

(3)

$\triangle ABC$ が $\angle BAC = 90^\circ$ の直角二等辺三角形となることは、 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$ かつ $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AC}|$ である

ことと同値である。よって,

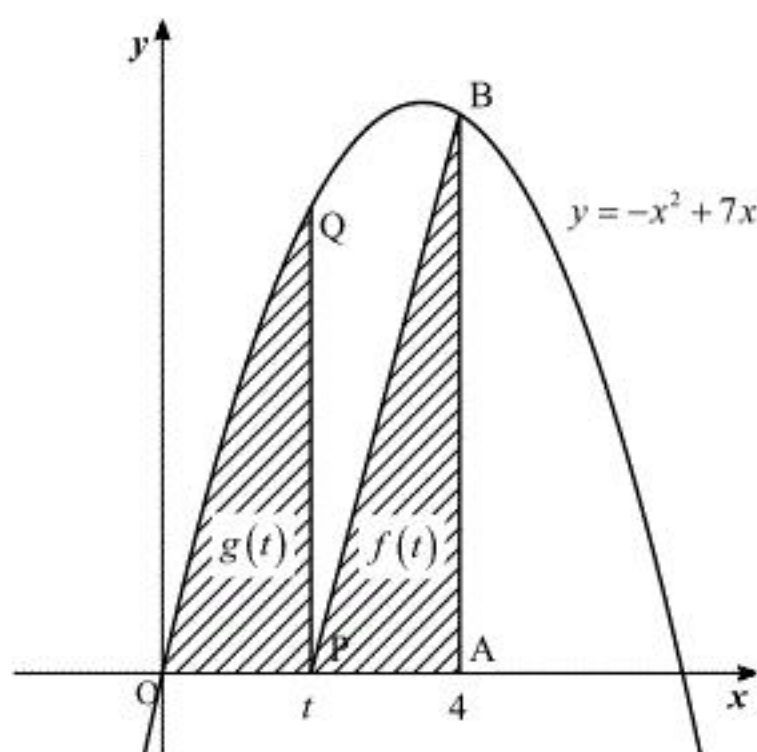
$$\begin{cases} 6s - 2t - 20 = 0 & \cdots \text{①} \\ s^2 - 2s + t^2 - 4t - 8 = 0 & \cdots \text{②} \end{cases}$$

である。①より $t = 3s - 10$ であり、これを②に代入すると,

$$\begin{aligned}
 s^2 - 2s + (3s-10)^2 - 4(3s-10) - 8 &= 0 \\
 \Leftrightarrow 5s^2 - 37s + 66 &= 0 \\
 \Leftrightarrow (5s-22)(s-3) &= 0 \\
 \therefore s &= \frac{22}{5}, 3
 \end{aligned}$$

と求まる。①より $s = \frac{22}{5}$ のとき $t = \frac{16}{5}$, $s = 3$ のとき $t = -1$ である。

$$(\text{答}) \quad (s, t) = \left(\frac{22}{5}, \frac{16}{5} \right), (3, -1)$$



$AP = 4 - t$, $AB = 12$ であるから, $\triangle APB$ の面積 $f(t)$ は,

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2}(4-t) \cdot 12 \\ &= -6t + 24 \end{aligned}$$

と求まる。

(答) $f(t) = -6t + 24$

(2)

求める面積 $g(t)$ は,

$$\begin{aligned} g(t) &= \int_0^t (-x^2 + 7x) dx \\ &= \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{7}{2}x^2 \right]_0^t \\ &= -\frac{1}{3}t^3 + \frac{7}{2}t^2 \end{aligned}$$

である。

(答) $g(t) = -\frac{1}{3}t^3 + \frac{7}{2}t^2$

(3)

$$\begin{aligned} h(t) &= f(t) + g(t) \\ &= -\frac{1}{3}t^3 + \frac{7}{2}t^2 - 6t + 24 \end{aligned}$$

である。

$$\begin{aligned} h'(t) &= -t^2 + 7t - 6 \\ &= -(t-1)(t-6) \end{aligned}$$

より, $h'(t) = 0$ とすると, $t = 1, 6$ であるので, $0 < t < 4$ における増減表は次のように書ける。

t	(0)	...	1	...	(4)
$h'(t)$		-	0	+	
$h(t)$		$\searrow$	極小	$\nearrow$	

したがって, $h(t)$ は $t = 1$ のとき最小値 $h(1) = -\frac{1}{3} + \frac{7}{2} - 6 + 24 = \frac{127}{6}$ をとる。

(答) $t = 1$ のとき 最小値 $\frac{127}{6}$

(1)

5枚のカードから4枚を選び並べるとき並べ方の総数は、

$${}_5P_4 = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120 \text{ 通り}$$

である。

(答) 120 通り

(2)

題意を満たす4つの数の選び方は $(1, 3, 4, 5)$, $(2, 3, 4, 5)$ の2通りであり、4つの数の引き方は問題文の条件から4通りである。よって、3と4のカードを捨てる場合は

$$2 \cdot 4 = 8 \text{ (通り)}$$

である。

(答) 8 通り

(3)

4つの数の引き方は $4! = 24$ (通り)であり、そのうちカードが捨てられる引き方は問題文の条件から4通りである。よって、求める確率は余事象を利用して

$$1 - \frac{4}{24} = \frac{5}{6}$$

である。

(答) $\frac{5}{6}$