

1

(1)

$$\begin{aligned} a_{n+2} &= (1-p)a_{n+1} + pa_n \\ \Leftrightarrow a_{n+2} - a_{n+1} &= -p(a_{n+1} - a_n) \\ \Leftrightarrow b_{n+1} &= -pb_n \end{aligned}$$

と変形できる。数列 $\{b_n\}$ は初項 $b_1 = a_2 - a_1 = 1$ 、公比 $-p$ の等比数列であるから、一般項は、

$$\begin{aligned} b_n &= 1 \cdot (-p)^{n-1} \\ &= (-p)^{n-1} \end{aligned}$$

と求まる。

(答) $b_n = (-p)^{n-1}$

(2)

数列 $\{b_n\}$ は数列 $\{a_n\}$ の階差数列であるため、(1)の結果より、 $n \geq 2$ のとき、 $0 < p < 1$ より $-p \neq 1$ であるから

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} (-p)^{k-1} \\ &= 1 + \frac{1 - (-p)^{n-1}}{1 - (-p)} \\ &= \frac{2 + p - (-p)^{n-1}}{1 + p} \end{aligned}$$

が成り立つ。 $a_1 = 1$ より、これは $n = 1$ のときも成り立つ。

(答) $a_n = \frac{2 + p - (-p)^{n-1}}{1 + p}$

(3)

$0 < p < 1$ より、 $-1 < -p < 0$ であるから、

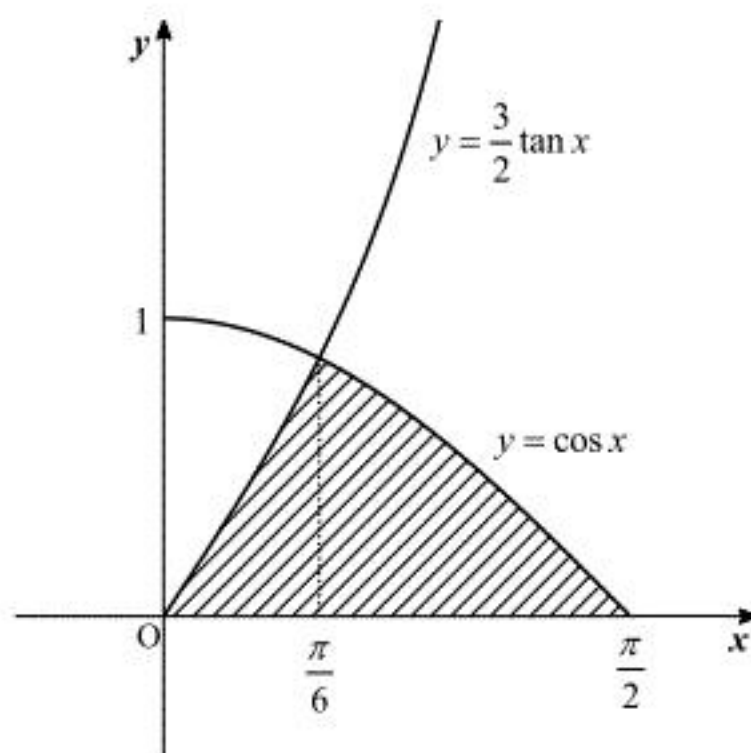
$$\lim_{n \rightarrow \infty} (-p)^{n-1} = 0$$

である。したがって、

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + p - (-p)^{n-1}}{1 + p} \\ &= \frac{2 + p}{1 + p} \end{aligned}$$

と求まる。

(答) $\frac{2 + p}{1 + p}$



2つの曲線と x 軸に囲まれる図形は上図の斜線部である。また、 $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$ に注意すると、

$y = \frac{3}{2} \tan x$ と $y = \cos x$ の共有点の x 座標は、

$$\begin{aligned}
 & \frac{3}{2} \tan x = \cos x \\
 \Leftrightarrow & \frac{3 \sin x}{2 \cos x} = \cos x \\
 \Leftrightarrow & \frac{3}{2} \sin x = \cos^2 x \quad (\because \cos x \neq 0) \\
 \Leftrightarrow & \frac{3}{2} \sin x = 1 - \sin^2 x \\
 \Leftrightarrow & 2 \sin^2 x + 3 \sin x - 2 = 0 \\
 \Leftrightarrow & (\sin x + 2)(2 \sin x - 1) = 0 \\
 \Leftrightarrow & \sin x = \frac{1}{2} \quad (\because 0 \leq \sin x < 1) \\
 \Leftrightarrow & x = \frac{\pi}{6} \quad \left(\because 0 \leq x < \frac{\pi}{2} \right)
 \end{aligned}$$

である。したがって、求める体積は、

$$\begin{aligned}
 & \pi \int_0^{\frac{\pi}{6}} \left(\frac{3}{2} \tan x \right)^2 dx + \pi \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx \\
 &= \frac{9}{4} \pi \int_0^{\frac{\pi}{6}} \tan^2 x dx + \frac{\pi}{2} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2x) dx \\
 &= \frac{9}{4} \pi \int_0^{\frac{\pi}{6}} \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx + \frac{\pi}{2} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2x) dx \\
 &= \frac{9}{4} \pi \left[\tan x - x \right]_0^{\frac{\pi}{6}} + \frac{\pi}{2} \left[x + \frac{1}{2} \sin 2x \right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \\
 &= \frac{9}{4} \pi \left(\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{\pi}{6} \right) + \frac{\pi}{2} \left\{ \frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{6} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right\} \\
 &= \frac{5\sqrt{3}}{8} \pi - \frac{5}{24} \pi^2
 \end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{5\sqrt{3}}{8} \pi - \frac{5}{24} \pi^2$

(1)

$a \geq 0, b \geq 0, a^2 + b^2 = 1$ より, $\cos \theta = a, \sin \theta = b, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ を満たす θ が存在する。

$a \sin x - b \cos x$ は, この θ を用いて

$$\begin{aligned} a \sin x - b \cos x &= \sin x \cos \theta - \cos x \sin \theta \\ &= \sin(x - \theta) \end{aligned}$$

と表せる。 $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ より,

$$\begin{cases} \sin(x - \theta) \leq 0 & (0 \leq x \leq \theta) \\ \sin(x - \theta) \geq 0 & (\theta \leq x \leq \frac{\pi}{2}) \end{cases}$$

である。よって,

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} |a \sin x - b \cos x| dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin(x - \theta)| dx \\ &= \int_0^{\theta} \{-\sin(x - \theta)\} dx + \int_{\theta}^{\frac{\pi}{2}} \sin(x - \theta) dx \\ &= [\cos(x - \theta)]_0^{\theta} + [-\cos(x - \theta)]_{\theta}^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \{1 - \cos(-\theta)\} + \left\{-\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) + 1\right\} \\ &= 2 - \cos \theta - \sin \theta \\ &= 2 - a - b \end{aligned}$$

と求まる。

(答) $S = 2 - a - b$

(2)

$$\begin{aligned} S &= 2 - \cos \theta - \sin \theta \\ &= 2 - \sqrt{2} \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) \end{aligned}$$

が成り立つ。 θ は $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ の範囲を動くから, $\frac{\pi}{4} \leq \theta + \frac{\pi}{4} \leq \frac{3\pi}{4}$ である。この範囲で,

$\sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)$ は,

$$\begin{aligned} \theta + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \text{ のとき, 最大値 } 1 \\ \theta + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} \text{ のとき, 最小値 } \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

をとる。よって, S は

$$\begin{aligned} \theta = 0, \frac{\pi}{2} \text{ つまり } (a, b) = (1, 0), (0, 1) \text{ のとき, 最大値 } 1, \\ \theta = \frac{\pi}{4} \text{ つまり } (a, b) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \text{ のとき, 最小値 } 2 - \sqrt{2} \end{aligned}$$

をとる。

(答) 最大値 1 $(a, b) = (1, 0), (0, 1)$

最小値 $2 - \sqrt{2}$ $(a, b) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

(1)

 $w = z$ のとき,

$$z = \frac{3(1-i)z-2i}{z+3(1-i)}$$

$$\Leftrightarrow z\{z+3(1-i)\} = 3(1-i)z-2i \quad \text{かつ} \quad z+3(1-i) \neq 0$$

$$\Leftrightarrow z^2 = -2i \quad \text{かつ} \quad z \neq -3(1-i)$$

である。 $z = r(\cos \theta + i \sin \theta) (r > 0, 0 \leq \theta < 2\pi)$ とすると,

$$\{r(\cos \theta + i \sin \theta)\}^2 = -2i$$

$$\Leftrightarrow r^2(\cos 2\theta + i \sin 2\theta) = 2\left(\cos \frac{3}{2}\pi + i \sin \frac{3}{2}\pi\right)$$

$$\Leftrightarrow r^2(\cos 2\theta + i \sin 2\theta) = 2\left(\cos \frac{7}{2}\pi + i \sin \frac{7}{2}\pi\right)$$

となる。 $r > 0, 0 \leq 2\theta < 4\pi$ より,

$$\begin{cases} r^2 = 2 \\ 2\theta = \frac{3}{2}\pi, \frac{7}{2}\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = \sqrt{2} \\ \theta = \frac{3}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi \end{cases}$$

と求まる。したがって,

$$\sqrt{2}\left(\cos \frac{3}{4}\pi + i \sin \frac{3}{4}\pi\right) = -1 + i$$

$$\sqrt{2}\left(\cos \frac{7}{4}\pi + i \sin \frac{7}{4}\pi\right) = 1 - i$$

より, $z = -1 + i, 1 - i$ である。これらは $z \neq -3(1-i)$ を満たす。(答) $z = -1 + i, 1 - i$

(2)

 $\arg \alpha < \arg \beta$ より, $\alpha = -1 + i, \beta = 1 - i$ である。このとき,

$$\begin{aligned} \frac{w-\beta}{w-\alpha} &= \frac{\frac{3(1-i)z-2i}{z+3(1-i)} - (1-i)}{\frac{3(1-i)z-2i}{z+3(1-i)} - (-1+i)} \\ &= \frac{3(1-i)z-2i - (1-i)\{z+3(1-i)\}}{3(1-i)z-2i - (-1+i)\{z+3(1-i)\}} \\ &= \frac{2(1-i)z+4i}{4(1-i)z-8i} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{(1-i)z+2i}{(1-i)z-2i} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{z + \frac{2i}{1-i}}{z - \frac{2i}{1-i}} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{z - (1-i)}{z - (-1+i)} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{z - \beta}{z - \alpha} \end{aligned}$$

となるので, $k = \frac{1}{2}$ である。(答) $k = \frac{1}{2}$

(3)

(2)より, $w = z_{n+1}, z = z_n$ とすると

$$\frac{z_{n+1}-\beta}{z_{n+1}-\alpha} = \frac{1}{2} \cdot \frac{z_n-\beta}{z_n-\alpha}$$

であるから, 数列 $\left\{\frac{z_n-\beta}{z_n-\alpha}\right\}$ は初項 $\frac{z_1-\beta}{z_1-\alpha} = \frac{-(1-i)}{-(-1+i)} = -1$, 公比 $\frac{1}{2}$ の等比数列であり,

$$\begin{aligned} \frac{z_n-\beta}{z_n-\alpha} &= (-1) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \\ \Leftrightarrow (z_n-\beta) \cdot 2^{n-1} &= -(z_n-\alpha) \\ \Leftrightarrow (2^{n-1}+1)z_n &= (-1+i) + (1-i) \cdot 2^{n-1} \\ \Leftrightarrow z_n &= \frac{2^{n-1}-1}{2^{n-1}+1} + \frac{-2^{n-1}+1}{2^{n-1}+1}i \end{aligned}$$

となる。したがって,

$$x_n = \frac{2^{n-1}-1}{2^{n-1}+1}, y_n = \frac{-2^{n-1}+1}{2^{n-1}+1}$$

である。また極限は,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} x_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n-1}-1}{2^{n-1}+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}} = 1 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} y_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-2^{n-1}+1}{2^{n-1}+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-1 + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}} = -1 \end{aligned}$$

と求まる。

(答) $x_n = \frac{2^{n-1}-1}{2^{n-1}+1}, y_n = \frac{-2^{n-1}+1}{2^{n-1}+1}$
 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = -1$