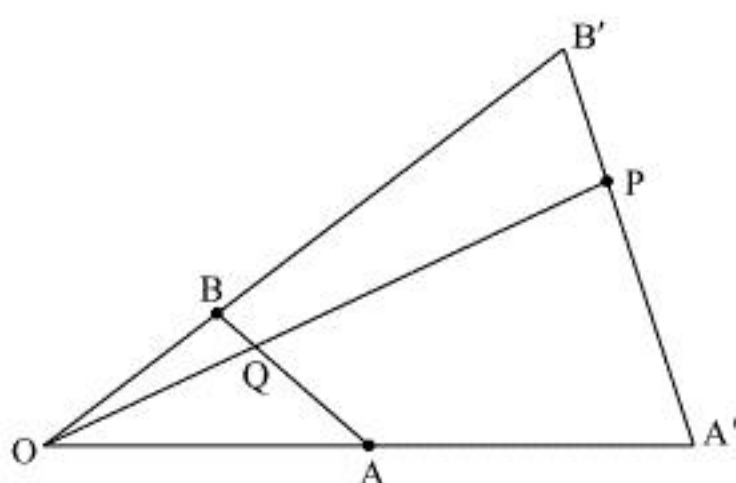




(1)

点Pは線分A'B'を2:1に内分するので,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} &= \frac{1}{3}\overrightarrow{OA'} + \frac{2}{3}\overrightarrow{OB'} \\ &= \frac{1}{3} \cdot 2\overrightarrow{OA} + \frac{2}{3} \cdot 3\overrightarrow{OB} \\ &= \frac{2}{3}\vec{a} + 2\vec{b}\end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \overrightarrow{OP} = \frac{2}{3}\vec{a} + 2\vec{b}$$

(2)

点Qは直線OP上に存在するので, 実数 k を用いて,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OQ} &= k\overrightarrow{OP} \\ &= k\left(\frac{2}{3}\vec{a} + 2\vec{b}\right) \\ &= \frac{2}{3}k\vec{a} + 2k\vec{b}\end{aligned}$$

と表すことができる。さらに, 点Qは線分AB上に存在することから,

$$\begin{aligned}\frac{2}{3}k + 2k &= 1 \\ \therefore k &= \frac{3}{8}\end{aligned}$$

となる。これより,

$$\frac{|\overrightarrow{OP}|}{|\overrightarrow{OQ}|} = \frac{1}{k} = \frac{8}{3}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{|\overrightarrow{OP}|}{|\overrightarrow{OQ}|} = \frac{8}{3}$$

(3)

$\overrightarrow{OP}$ と $\overrightarrow{AB}$ は直交するので, $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ である。ここで, $|\vec{a}| = \sqrt{5}$, $|\vec{b}| = \sqrt{3}$ より,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{AB} &= 0 \\ \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\vec{a} + 2\vec{b}\right) \cdot (\vec{b} - \vec{a}) &= 0 \\ \Leftrightarrow -\frac{2}{3}|\vec{a}|^2 - \frac{4}{3}\vec{a} \cdot \vec{b} + 2|\vec{b}|^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow -\frac{2}{3} \cdot 5 - \frac{4}{3}\vec{a} \cdot \vec{b} + 2 \cdot 3 &= 0 \\ \therefore \vec{a} \cdot \vec{b} &= 2\end{aligned}$$

となる。以上を利用して, 三角形OABの面積は,

$$\frac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2} = \frac{1}{2}\sqrt{5 \cdot 3 - 2^2} = \frac{\sqrt{11}}{2}$$

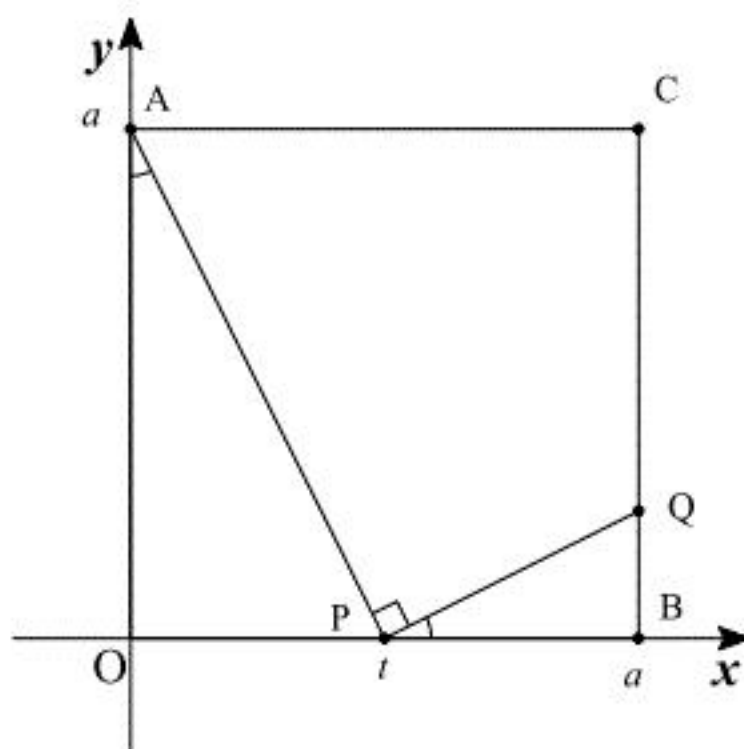
となる。 $\triangle OAB$ と $\triangle PAB$ が辺ABを共有し, (2)より, $OQ:QP = 3:5$ であるから, 三角形PABの面積は,

$$\frac{5}{3} \cdot \frac{\sqrt{11}}{2} = \frac{5\sqrt{11}}{6}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \text{三角形OAB} \frac{\sqrt{11}}{2}, \text{ 三角形PAB} \frac{5\sqrt{11}}{6}$$

(1)



三角形 OAP と三角形 BPQ はともに直角三角形である。さらに、 $\angle BPQ + \angle APO = 90^\circ$ 、 $\angle OAP + \angle APO = 90^\circ$ であるから、 $\angle BPQ = \angle OAP$ となる。これより、三角形 OAP と三角形 BPQ は相似である。さらにその相似比は、

$$OA : BP = a : (a - t)$$

である。よって、三角形 PBQ の面積 S は、三角形 OAP の面積の $\left(\frac{a-t}{a}\right)^2$ 倍となり、

$$S = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t \cdot \left(\frac{a-t}{a}\right)^2 = \frac{t(a-t)^2}{2a}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad S = \frac{t(a-t)^2}{2a}$$

(2)

S を t で微分して、

$$S' = \frac{(a-t)^2 - 2t(a-t)}{2a} = \frac{(a-t)(a-3t)}{2a}$$

となる。 $0 < t < a$ であるから、増減表は以下のようになる。

t	0	...	$\frac{a}{3}$	...	a
S'		+	0	-	
S			$\frac{2}{27}a^2$		

これより、 S は $t = \frac{a}{3}$ の時に最大値をとり、その値は

$$\frac{1}{2a} \cdot \frac{a}{3} \cdot \left(a - \frac{a}{3}\right)^2 = \frac{2}{27}a^2$$

である。

$$(\text{答}) \quad S \text{ の最大値 } \frac{2}{27}a^2, \quad t = \frac{a}{3}$$

(1)

点 P の位置が 1 となるためには、表が 4 回、裏が 3 回出ればよい。よって、その確率は、

$${}_7C_4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^7 = \frac{35}{128}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{35}{128}$$

(2)

コインを 6 回投げ終えたときまでに点 P がちょうど 2 回正の位置にあり、7 回投げ終えたときに点 P の位置が 1 となる表裏の出方は、

表, 裏, 表, 裏, 裏, 表, 表

表, 裏, 裏, 表, 表, 裏, 表

裏, 表, 表, 裏, 表, 裏, 表

裏, 表, 裏, 表, 表, 表, 裏

裏, 裏, 表, 表, 表, 表, 裏

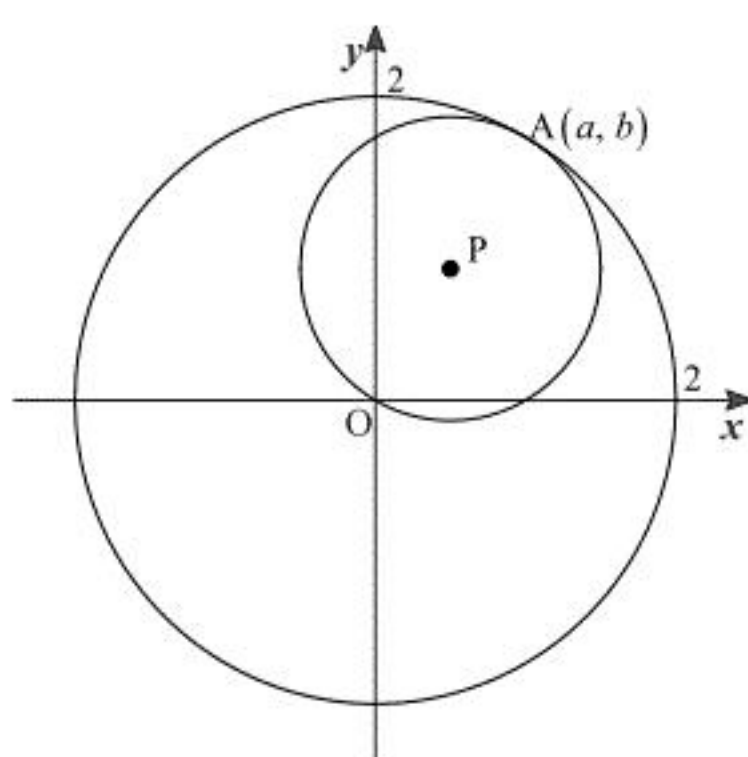
の 5 通りが存在する。さらにそのコインの出方はすべて $\left(\frac{1}{2}\right)^7$ であるから、求める確率は、

$$\left(\frac{1}{2}\right)^7 \cdot 5 = \frac{5}{128}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{5}{128}$$

(1)



円 C_2 は点 A で円 C_1 に内接するので、 O, P, A はこの順に一直線上に存在する。 $OA = 2, OP = 1$

より、 P は OA の中点だから $P\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$ となる。よって、円 C_2 の方程式は

$$\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{b}{2}\right)^2 = 1$$

となる。

$$(\text{答}) \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{b}{2}\right)^2 = 1$$

(2)

$c \neq 0$ の時、直線 OB の方程式は

$$y = \frac{d}{c}x$$

である。これと円 C_2 の方程式を連立して、

$$\begin{aligned} \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{d}{c}x - \frac{b}{2}\right)^2 &= 1 \\ \Leftrightarrow \left(1 + \frac{d^2}{c^2}\right)x^2 - \left(a + \frac{bd}{c}\right)x + \frac{a^2 + b^2 - 4}{4} &= 0 \end{aligned}$$

となる。ここで、 $a^2 + b^2 = 4$ より、上の式は

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{d^2}{c^2}\right)x^2 - \left(a + \frac{bd}{c}\right)x &= 0 \\ \Leftrightarrow x \left\{ \left(1 + \frac{d^2}{c^2}\right)x - \left(a + \frac{bd}{c}\right) \right\} &= 0 \end{aligned}$$

となる。 Q は原点でないから、 $x \neq 0$ とする。 B は円 C_1 上にあることから $c^2 + d^2 = 4$ となるので、

$$x = \frac{a + \frac{bd}{c}}{1 + \frac{d^2}{c^2}} = \frac{(ac + bd)c}{c^2 + d^2} = \frac{(ac + bd)c}{4}$$

となる。これを直線 OB の方程式に代入して、

$$y = \frac{d}{c} \cdot \frac{(ac + bd)c}{4} = \frac{(ac + bd)d}{4}$$

となる。よって、点 Q の座標は $\left(\frac{(ac + bd)c}{4}, \frac{(ac + bd)d}{4}\right)$ である。 $c = 0$ の時、点 B の座標は

$(0, \pm 2)$ であるから、直線 OB の方程式は $x = 0$ となる。これと円 C_2 の方程式を連立して、

$$\begin{aligned} \left(-\frac{a}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{b}{2}\right)^2 &= 1 \\ y^2 - by + \frac{a^2 + b^2 - 4}{4} &= 0 \end{aligned}$$

となる。ここで、 $a^2 + b^2 = 4$ より、上の式は

$$\begin{aligned} y^2 - by &= 0 \\ y(y - b) &= 0 \end{aligned}$$

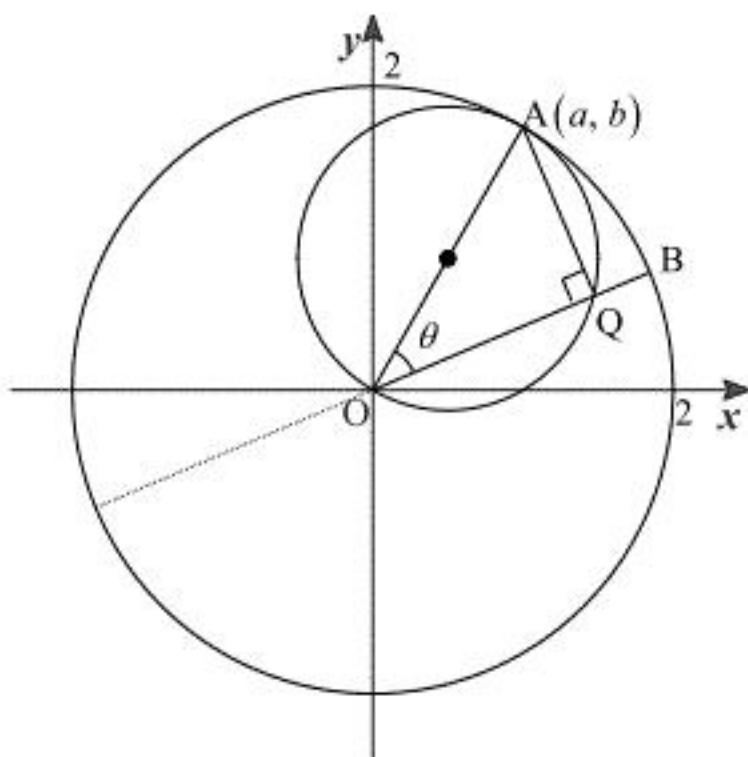
となる。 Q は原点でないから、 $y \neq 0$ とすると、 $y = b$ となり、点 Q の座標は $(0, b)$ となる。こ

れは、 $c \neq 0$ の時の点 Q の座標である $\left(\frac{(ac + bd)c}{4}, \frac{(ac + bd)d}{4}\right)$ にそれぞれの値を代入した値

に等しい。以上より、点 Q の座標は $\left(\frac{(ac + bd)c}{4}, \frac{(ac + bd)d}{4}\right)$ となる。

$$(\text{答}) Q\left(\frac{(ac + bd)c}{4}, \frac{(ac + bd)d}{4}\right)$$

(3)



円 C_2 において円周角と中心角の関係より、

$$\angle APQ = 2\angle AOQ = 2\theta$$

となる。 OA は円 C_2 の直径であり、三角形 OAQ は $\angle OQA = \frac{\pi}{2}$ の直角三角形であるから、

$$\angle OAQ = \frac{\pi}{2} - \theta$$

となり、 $\triangle OAQ$ に関する正弦定理より、

$$\begin{aligned} \frac{OQ}{\sin \angle OAQ} &= 2 \cdot 1 \\ \Leftrightarrow OQ &= 2 \sin \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) \quad (\because \sin \angle OAQ \neq 0) \\ \Leftrightarrow OQ &= 2 \cos \theta \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \angle APQ = 2\theta, OQ = 2 \cos \theta$$