

1

(1)

$$f(x) = \frac{(\log ax)^3}{x}$$

であるから、

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{3(\log ax)^2 \cdot \frac{1}{x} \cdot x - (\log ax)^3}{x^2} \\ &= \frac{(\log ax)^2 (3 - \log ax)}{x^2} \end{aligned}$$

となる。よって、 $f'(x) = 0$ となるのは、

$$\log ax = 0, 3 \Leftrightarrow ax = 1, e^3$$

のときであり、 $a > 0$ から $x = \frac{1}{a}, \frac{e^3}{a}$ のときである。よって、 $f(x)$ の増減表は以下のようになる。

x	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{a}$	$\cdots$	$\frac{e^3}{a}$	$\cdots$
$f'(x)$	$\nearrow$	$+$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\frac{27a}{e^3}$	$\searrow$

増減表より、 $f(x)$ は $x = \frac{e^3}{a}$ のとき、極大値をとり、その値は

$$f\left(\frac{e^3}{a}\right) = \frac{a \cdot 3^3}{e^3} = \frac{27a}{e^3}$$

となる。よって、

$$\begin{cases} \frac{e^3}{a} = b \\ \frac{27a}{e^3} = \frac{54}{e^3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = \frac{e^3}{2} \end{cases}$$

となる。

(答) $a = 2, b = \frac{e^3}{2}$

(2)

$a = 2$ であるから、 $f(x) = \frac{(\log 2x)^3}{x}$ である。よって、

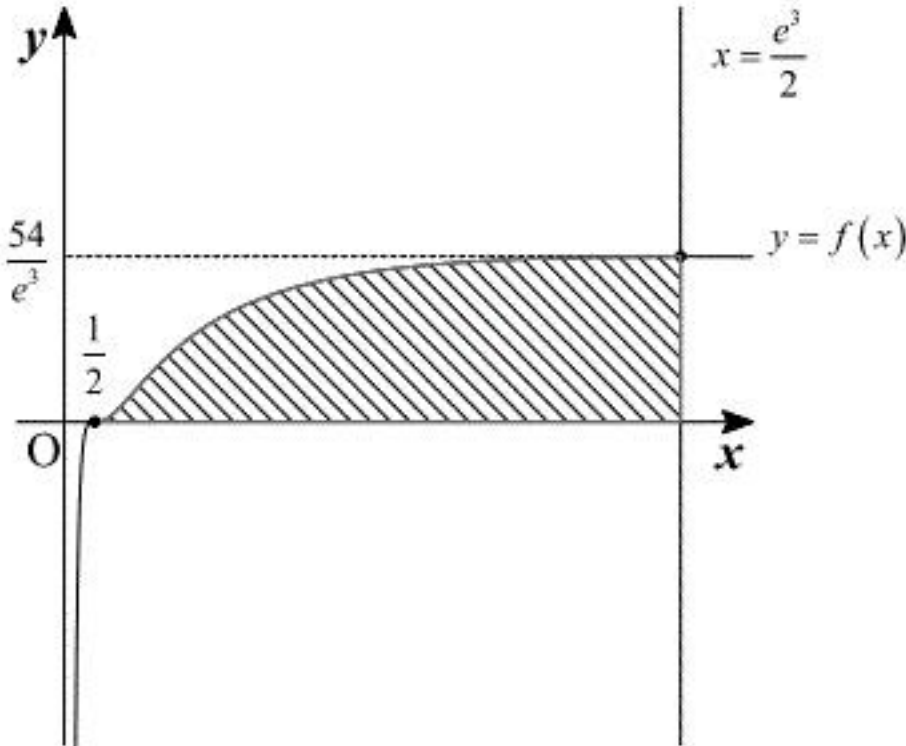
$$\begin{aligned} \int f(x) dx &= \int \frac{(\log 2x)^3}{x} dx \\ &= \int (\log 2x)^3 \cdot (\log 2x)' dx \\ &= \frac{1}{4} (\log 2x)^4 + C \end{aligned}$$

となる。ただし、 C は積分定数である。

(答) $\int f(x) dx = \frac{1}{4} (\log 2x)^4 + C$ (C は積分定数)

(3)

求める面積は下図の斜線部になる。



上図より、求める面積は、

$$\begin{aligned} \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{e^3}{2}} \frac{(\log 2x)^3}{x} dx &= \left[\frac{1}{4} (\log 2x)^4 \right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{e^3}{2}} \\ &= \frac{1}{4} (\log e^3)^4 - \frac{1}{4} (\log 1)^4 \\ &= \frac{81}{4} \end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{81}{4}$

(1)

$\frac{\sin x + \cos x}{e^x}$ を x で微分すると,

$$\left(\frac{\sin x + \cos x}{e^x} \right)' = \frac{(\cos x - \sin x)e^x - (\sin x + \cos x)e^x}{e^{2x}} = -\frac{2\sin x}{e^x}$$

である。これより,

$$\int \frac{\sin x}{e^x} dx = \int -\frac{1}{2} \left(\frac{\sin x + \cos x}{e^x} \right)' dx = -\frac{\sin x + \cos x}{2e^x} + C_1$$

となる。ただし, C_1 は積分定数である。

$$(\text{答}) \quad \left(\frac{\sin x + \cos x}{e^x} \right)' = -\frac{2\sin x}{e^x}, \quad \int \frac{\sin x}{e^x} dx = -\frac{\sin x + \cos x}{2e^x} + C_1 \quad (C_1 \text{ は積分定数})$$

(2)

$2n\pi \leq x \leq (2n+1)\pi$ において, $\frac{\sin x}{e^x} \geq 0$ である。よって,

$$\begin{aligned} a_n &= \int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} \frac{\sin x}{e^x} dx \\ &= \left[-\frac{\sin x + \cos x}{2e^x} \right]_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} \\ &= -\frac{1}{2} \left\{ \frac{-1}{e^{(2n+1)\pi}} - \frac{1}{e^{2n\pi}} \right\} \\ &= \frac{e^\pi + 1}{2e^{(2n+1)\pi}} \end{aligned}$$

となる。 $\{a_n\}$ は初項 $a_0 = \frac{e^\pi + 1}{2e^\pi}$, 公比 $\frac{1}{e^{2\pi}}$ の等比数列であるから, $0 < \frac{1}{e^{2\pi}} < 1$ よりその無限等比級数は収束し,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{1 - \frac{1}{e^{2\pi}}} \cdot \frac{e^\pi + 1}{2e^\pi} = \frac{e^\pi(e^\pi + 1)}{2(e^{2\pi} - 1)} = \frac{e^\pi(e^\pi + 1)}{2(e^\pi + 1)(e^\pi - 1)} = \frac{e^\pi}{2(e^\pi - 1)}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{e^\pi}{2(e^\pi - 1)}$$

(3)

$$V_n = \pi \int_0^{n\pi} \left(\frac{\sin x}{e^x} \right)^2 dx = \pi \int_0^{n\pi} \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \cos 2x}{e^{2x}} dx = \frac{\pi}{2} \left\{ \int_0^{n\pi} \frac{1}{e^{2x}} dx - \int_0^{n\pi} \frac{\cos 2x}{e^{2x}} dx \right\}$$

である。ここで

$$\int_0^{n\pi} \frac{1}{e^{2x}} dx = \left[-\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{e^{2x}} \right]_0^{n\pi} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2e^{2n\pi}}$$

である。 $\int_0^{n\pi} \frac{\cos 2x}{e^{2x}} dx$ について考える。 $t = 2x$ とすると,

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2}$$

であり,

$$\begin{array}{c|c} x & 0 \rightarrow n\pi \\ \hline t & 0 \rightarrow 2n\pi \end{array}$$

となるので,

$$\int_0^{n\pi} \frac{\cos 2x}{e^{2x}} dx = \int_0^{2n\pi} \frac{\cos t}{e^t} \cdot \frac{dx}{dt} \cdot dt = \frac{1}{2} \int_0^{2n\pi} \frac{\cos t}{e^t} dt$$

である。ここで,

$$\left(\frac{\sin x - \cos x}{e^x} \right)' = \frac{(\cos x + \sin x)e^x - (\sin x - \cos x)e^x}{e^{2x}} = \frac{2\cos x}{e^x}$$

であるから,

$$\int \frac{\cos x}{e^x} dx = \int \frac{1}{2} \left(\frac{\sin x - \cos x}{e^x} \right)' dx = \frac{\sin x - \cos x}{2e^x} + C_2 \quad (C_2 \text{ は積分定数})$$

となる。よって,

$$\begin{aligned} \int_0^{n\pi} \frac{\cos 2x}{e^{2x}} dx &= \frac{1}{2} \int_0^{2n\pi} \frac{\cos t}{e^t} dt \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{\sin t - \cos t}{2e^t} \right]_0^{2n\pi} \\ &= \frac{1}{4} - \frac{1}{4e^{2n\pi}} \end{aligned}$$

となる。以上より,

$$\begin{aligned} V_n &= \frac{\pi}{2} \left\{ \int_0^{n\pi} \frac{1}{e^{2x}} dx - \int_0^{n\pi} \frac{\cos 2x}{e^{2x}} dx \right\} \\ &= \frac{\pi}{2} \left\{ \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2e^{2n\pi}} \right) - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4e^{2n\pi}} \right) \right\} \\ &= \frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4e^{2n\pi}} \right) \end{aligned}$$

となり,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} V_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4e^{2n\pi}} \right) = \frac{\pi}{8}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} V_n = \frac{\pi}{8}$$

(1)

複素数平面上で $A(\alpha)$, $B(\beta)$ とする。すると、三角形 OAB は $OA:AB:BO=1:1:\sqrt{2}$ の三角形であるので、直角二等辺三角形である。これより、 $\angle AOB = \frac{\pi}{4}$ である。 $\frac{\beta}{\alpha}$ の虚部は正であるから、

$$\begin{aligned}\frac{\beta}{\alpha} &= \frac{|\beta|}{|\alpha|} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \\ &= \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}} \right) \\ &= 1+i\end{aligned}$$

となる。また、ド・モアブルの定理より、

$$\begin{aligned}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^8 &= (\sqrt{2})^8 \left(\cos \frac{8}{4}\pi + i \sin \frac{8}{4}\pi \right) \\ &= 16\end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{\beta}{\alpha} = 1+i, \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^8 = 16$$

(2)

(1)より、

$$\begin{aligned}|\alpha + \beta| &= |\alpha + (1+i)\alpha| \\ &= |\alpha(2+i)| \\ &= |\alpha||2+i| \\ &= 1 \cdot \sqrt{5} \\ &= \sqrt{5}\end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad |\alpha + \beta| = \sqrt{5}$$

(3)

n は 8 で割ると 1 余る整数であるから、整数 k を用いて、 $n = 8k + 1$ とおくことができる。よって、

$$\begin{aligned}\beta^n &= (\sqrt{2})^n \left\{ \cos \frac{(8k+1)}{4}\pi + i \sin \frac{(8k+1)}{4}\pi \right\} \alpha^n \\ &= (\sqrt{2})^n \left\{ \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right\} \alpha^n \\ &= (\sqrt{2})^{n-1} (1+i) \alpha^n\end{aligned}$$

となり、

$$\begin{aligned}|\alpha^n + \beta^n| &= \left| \alpha^n + (\sqrt{2})^{n-1} (1+i) \alpha^n \right| \\ &= |\alpha^n| \left| 1 + (\sqrt{2})^{n-1} (1+i) \right| \\ &= \sqrt{\left\{ 1 + (\sqrt{2})^{n-1} \right\}^2 + \left\{ (\sqrt{2})^{n-1} \right\}^2} \\ &= \sqrt{2^n + 2^{\frac{n+1}{2}} + 1}\end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad |\alpha^n + \beta^n| = \sqrt{2^n + 2^{\frac{n+1}{2}} + 1}$$

(1)

$$f(x)=\frac{1}{x}\cos^2\left(\frac{\log x}{2}\right)$$

であるから、

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{-1}{x^2}\cos^2\left(\frac{\log x}{2}\right) + \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{2x} \cdot \left\{-2\sin\left(\frac{\log x}{2}\right)\cos\left(\frac{\log x}{2}\right)\right\} \\ &= \frac{-1}{x^2} \cdot \cos\left(\frac{\log x}{2}\right) \left\{\sin\left(\frac{\log x}{2}\right) + \cos\left(\frac{\log x}{2}\right)\right\} \\ &= -\frac{\sqrt{2}}{x^2}\cos\left(\frac{\log x}{2}\right)\sin\left(\frac{\log x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \end{aligned}$$

となる。よって、 $x \geq 1$ において $f'(x)=0$ となるとき、整数 k を用いて、

$$\frac{\log x}{2}=k\pi+\frac{\pi}{2}, k\pi+\frac{3}{4}\pi$$

と表せる。これより、

$$x=e^{2k\pi+\pi}, e^{2k\pi+\frac{3}{2}\pi}$$

となる。このうち、 $x \geq 1$ を満たす最小のものは、 e^π となる。

(答) e^π

(2)

(1)より、 $f(x)$ の増減表は以下のようになる。

x	1	...	e^π	...	$e^{\frac{3}{2}\pi}$	...	$e^{3\pi}$	...	$e^{\frac{7}{2}\pi}$	...
$f'(x)$		-	0	+	0	-	0	+	0	-
$f(x)$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{2e^{\frac{3}{2}\pi}}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{2e^{\frac{7}{2}\pi}}$	$\searrow$

$f'(x)$ の正負は、 $x=e^{2k\pi+\pi}$ の前後で負から正に変化し、 $x=e^{2k\pi+\frac{3}{2}\pi}$ の前後で正から負に変化す

る。よって、 $x=e^{2k\pi+\pi}$ のときに極小値をとり、 $x=e^{2k\pi+\frac{3}{2}\pi}$ のときに極大値をとる。ここで、

$$\begin{aligned} f\left(e^{2k\pi+\pi}\right) &= \frac{1}{e^{2k\pi+\pi}}\cos^2\left(k\pi+\frac{\pi}{2}\right)=0 \\ f\left(e^{2k\pi+\frac{3}{2}\pi}\right) &= \frac{1}{e^{2k\pi+\frac{3}{2}\pi}}\cos^2\left(k\pi+\frac{3}{4}\pi\right)=\frac{1}{2e^{2k\pi+\frac{3}{2}\pi}} \end{aligned}$$

となる。よって、 $f\left(e^{2k\pi+\frac{3}{2}\pi}\right)$ の値は、 k の値が大きくなるほど小さくなる。以下は、 x の区間で場合分けして考える。

[1] $x=1$ のとき

$$f(1)=1 \text{ より } f(x) \neq \frac{1}{10} \text{ である。}$$

[2] $1 < x < e^\pi$ のとき

$$1 < x < e^\pi \text{ においては、 } f'(x) < 0 \text{ であり、単調減少する。}$$

$$f\left(e^\pi\right)=0 < \frac{1}{10} < f(1)=1$$

であり、 $f(x)$ は連続な関数であることよりこの区間において、 $f(x)=\frac{1}{10}$ の解はただ一つ存在する。

[3] $e^\pi \leq x \leq e^{\frac{3}{2}\pi}$ のとき

$$e^\pi \leq x \leq e^{\frac{3}{2}\pi} \text{ においては、 } f'(x) \geq 0 \text{ であり、広義の意味で単調増加する。}$$

$$f\left(e^{\frac{3}{2}\pi}\right)=\frac{1}{e^{\frac{3}{2}\pi}}$$

であり、 $e^{\frac{3}{2}\pi} > 2^{\frac{3}{2} \cdot 3} > 2^4 > 16 > 10$ より、 $f\left(e^{\frac{3}{2}\pi}\right) < \frac{1}{10}$ であることから、この区間において、

$$f(x) < \frac{1}{10} \text{ となり } f(x)=\frac{1}{10} \text{ の解は存在しない。}$$

[4] $e^{\frac{3}{2}\pi} \leq x$ のとき

$$f\left(e^{2k\pi+\frac{3}{2}\pi}\right) \text{ の値は、 } k \text{ の値が大きくなるほど小さくなるので、 } x \geq \frac{3}{2}\pi \text{ において、極大値}$$

$$\text{の最大となるのは } f\left(e^{\frac{3}{2}\pi}\right) \text{ である。[3]と同様に、}$$

$$f\left(e^{\frac{3}{2}\pi}\right)=\frac{1}{e^{\frac{3}{2}\pi}} < \frac{1}{10}$$

を満たし、 $f(x)$ は連続な関数であることから、 $f(x) < \frac{1}{10}$ となり $f(x)=\frac{1}{10}$ の解は存在しない。

以上、[1],[2],[3],[4]より、 $f(x)=\frac{1}{10}$ の解はただ一つ存在することが示せた。

(証明終)

(3)

$$\frac{\log x}{2}=s \text{ とおくと、}$$

$$\frac{ds}{dx}=\frac{1}{2x}$$

であり、

$$\begin{array}{c|c} x & 1 \rightarrow t \\ \hline s & 0 \rightarrow \frac{\log t}{2} \end{array}$$

である。よって、

$$\begin{aligned} \int_1^t f(x)dx &= \int_0^{\frac{\log t}{2}} 2\cos^2 s ds \\ &= \int_0^{\frac{\log t}{2}} (\cos 2s + 1) ds \\ &= \left[\frac{1}{2}\sin 2s + s \right]_0^{\frac{\log t}{2}} \\ &= \frac{1}{2}\{\sin(\log t) + \log t\} \end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{1}{2}\{\sin(\log t) + \log t\}$