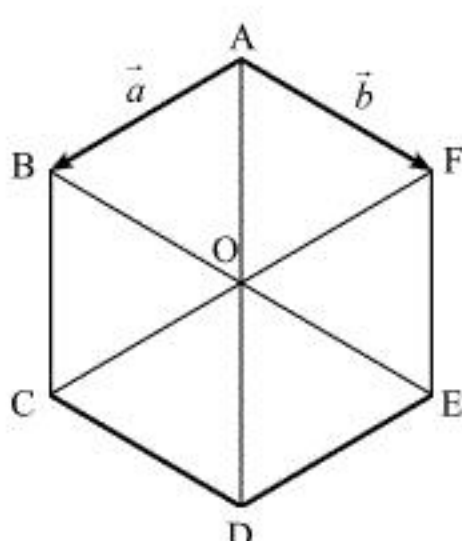


1

(1)

正六角形の対角線は1点で交わるから、対角線 AD, BE, CF の交点を O とする。以下に正六角形 ABCDEF および点 O を図示する。



上図より、正六角形は対角線によって正三角形として分けられている。図形の対称性より、 $AF \parallel BO$ かつ $AF = BO$ であるから、 $\overrightarrow{BO} = \overrightarrow{AF}$ である。したがって、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AD} &= 2\overrightarrow{AO} \\ &= 2(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BO}) \\ &= 2(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AF}) \\ &= 2\vec{a} + 2\vec{b}\end{aligned}$$

となる。

(答) $\overrightarrow{AD} = 2\vec{a} + 2\vec{b}$

(2)

点 P は辺 DE を 2:1 に内分する点であるから、

$$\overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AE}$$

である。ここで、 $\overrightarrow{BE} = 2\overrightarrow{BO}$ であるから、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AP} &= \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AE} \\ &= \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} + \frac{2}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE}) \\ &= \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} + \frac{2}{3}(\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BO}) \\ &= \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} + \frac{2}{3}(\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AF}) \\ &= \frac{1}{3}(2\vec{a} + 2\vec{b}) + \frac{2}{3}(\vec{a} + 2\vec{b}) \\ &= \frac{4}{3}\vec{a} + 2\vec{b}\end{aligned}$$

となる。

(答) $\overrightarrow{AP} = \frac{4}{3}\vec{a} + 2\vec{b}$

(3)

点 Q は直線 AP 上にあるから、ある実数 k を用いると

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AQ} &= k\overrightarrow{AP} \\ &= \frac{4}{3}k\vec{a} + 2k\vec{b} \\ &= \frac{4}{3}k\overrightarrow{AB} + 2k\overrightarrow{AF}\end{aligned}$$

が成り立つ。また、点 Q は直線 BF 上にあり、 $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AF}$ が 1 次独立であるため、上式の係数の和は 1 に等しく

$$\begin{aligned}\frac{4}{3}k + 2k &= 1 \\ \therefore k &= \frac{3}{10}\end{aligned}$$

が得られる。よって、

$$\overrightarrow{AQ} = \frac{2}{5}\vec{a} + \frac{3}{5}\vec{b}$$

である。

(答) $\overrightarrow{AQ} = \frac{2}{5}\vec{a} + \frac{3}{5}\vec{b}$

(4)

正六角形の内角より、 $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角は 120° であるから、

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos 120^\circ = -\frac{1}{2}$$

である。よって、

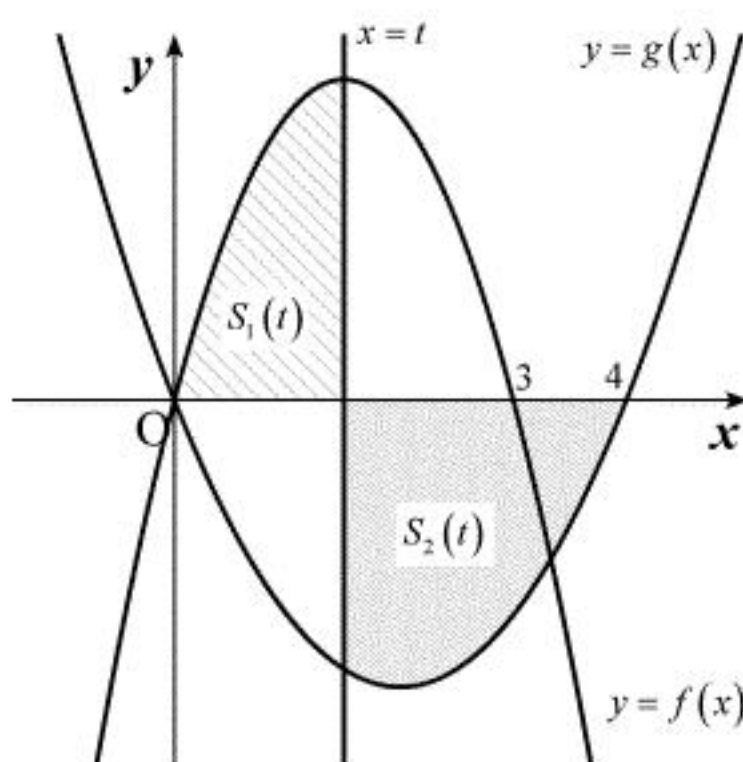
$$\begin{aligned}|\overrightarrow{AQ}| &= \left| \frac{2}{5}\vec{a} + \frac{3}{5}\vec{b} \right| \\ &= \sqrt{\left(\frac{2}{5}|\vec{a}| \right)^2 + \left(\frac{3}{5}|\vec{b}| \right)^2 + \left(2 \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{5} \right) \vec{a} \cdot \vec{b}} \\ &= \sqrt{\frac{4}{25} + \frac{9}{25} + \frac{12}{25} \cdot \left(-\frac{1}{2} \right)} \\ &= \frac{\sqrt{7}}{5}\end{aligned}$$

である。

(答) $|\overrightarrow{AQ}| = \frac{\sqrt{7}}{5}$

(1)

以下に、 $y=f(x)$ と $y=g(x)$ のグラフ、 $S_1(t)$ を斜線部で、 $S_2(t)$ を打点部で示す。



図より、

$$\begin{aligned} S_1(t) &= \int_0^t f(x) dx \\ &= \int_0^t (-2x^2 + 6x) dx \\ &= \left[-\frac{2}{3}x^3 + 3x^2 \right]_0^t \\ &= -\frac{2}{3}t^3 + 3t^2 \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad S_1(t) = -\frac{2}{3}t^3 + 3t^2$$

(2)

(1)の図より、

$$\begin{aligned} S_2(t) &= \int_t^4 -g(x) dx \\ &= \int_t^4 (-x^2 + 4x) dx \\ &= \left[-\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 \right]_t^4 \\ &= \left(-\frac{64}{3} + 32 \right) - \left(-\frac{1}{3}t^3 + 2t^2 \right) \\ &= \frac{1}{3}t^3 - 2t^2 + \frac{32}{3} \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad S_2(t) = \frac{1}{3}t^3 - 2t^2 + \frac{32}{3}$$

(3)

(1), (2)の結果より、

$$S(t) = S_1(t) + S_2(t) = -\frac{1}{3}t^3 + t^2 + \frac{32}{3}$$

である。ここで、

$$S'(t) = -t^2 + 2t = -t(t-2)$$

となるから、増減表は以下のようになる。

t	0	...	2	...	3
$S'(t)$		+	0	-	
$S(t)$		↗	極大	↘	

上表より、 $S(t)$ の最大値は $S(2) = -\frac{8}{3} + 4 + \frac{32}{3} = 12$ である。

(答) 最大値:12

(1)

サイコロを3回投げるとき起こりうるすべての事象は 6^3 通りであり、これらは同様に確からしく起こる。サイコロを3回投げた後の点Pの座標を (x_3, y_3) と表す。サイコロを3回投げ終えたとき、奇数の目が出た回数で場合分けする。

[1] 奇数の目が1回も出ないとき

このとき偶数の目は3回出るから、 $x_3 = 0, y_3 > 0$ となり条件を満たさない。

[2] 奇数の目が1回出るとき

このとき偶数は2回出るから、 x_3 は奇数、 y_3 は偶数となり、条件を満たさない。

[3] 奇数の目が2回出るとき

偶数の目は1回出るから、 $y_3 = 2, 4, 6$ のいずれかである。よって、条件を満たす出目の組み合わせは、

$$\{1, 1, 2\}, \{1, 3, 4\}, \{1, 5, 6\}, \{3, 3, 6\}$$

である。各目が出る順序を考慮すると、条件を満たす出目は、

$$\frac{3!}{2!} + 3! + 3! + \frac{3!}{2!} = 18 \text{ (通り)}$$

ある。

[4] 奇数の目が3回出るとき

偶数の目は出ないから、 $x_3 > 0, y_3 = 0$ となり条件を満たさない。

以上[1], [2], [3], [4]より、求める確率は、

$$\frac{18}{6^3} = \frac{1}{12}$$

である。

$$\text{(答)} \quad \frac{1}{12}$$

(2)

条件を満たすのはサイコロの出目のうち $n-1$ 回が奇数で、1回が2となる場合である。サイコロを1回投げるとき、奇数の目が出る確率は $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ 、2の目が出る確率は $\frac{1}{6}$ である。また、2の目が何回目に出るかという場合の数が ${}_nC_1$ 通りであるから、求める確率は、

$${}_nC_1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{6} = \frac{n}{3 \cdot 2^n}$$

である。

$$\text{(答)} \quad \frac{n}{3 \cdot 2^n}$$

(3)

問題の条件を満たすのは次の2つの場合がある。

[1] サイコロを $n-1$ 回投げ終えたときに点Pの y 座標が2であり、 n 回目の出目が2, 4, 6のいずれかである場合

サイコロを $n-1$ 回投げ終えたときに点Pの y 座標が2である確率は、(2)より $\frac{n-1}{3 \cdot 2^{n-1}}$ であ

る。また、 n 回目の出目が2, 4, 6のいずれかである確率は $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ であるから、この場合に

条件を満たす確率は

$$\frac{n-1}{3 \cdot 2^{n-1}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{n-1}{3 \cdot 2^n}$$

である。

[2] サイコロを $n-1$ 回投げ終えたときに点Pの y 座標が0であり、 n 回目の出目が4, 6のいずれかである場合

サイコロを $n-1$ 回投げ終えたときに点Pの y 座標が0であるのは、すべての回で出目が奇数となる場合であり、その確率は $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ である。また、 n 回目の出目が4, 6のいずれか

である確率は $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ であるから、この場合に条件を満たす確率は、

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3 \cdot 2^{n-1}}$$

である。

以上[1], [2]より、求める確率は、

$$\frac{n-1}{3 \cdot 2^n} + \frac{1}{3 \cdot 2^{n-1}} = \frac{n+1}{3 \cdot 2^n}$$

である。

$$\text{(答)} \quad \frac{n+1}{3 \cdot 2^n}$$