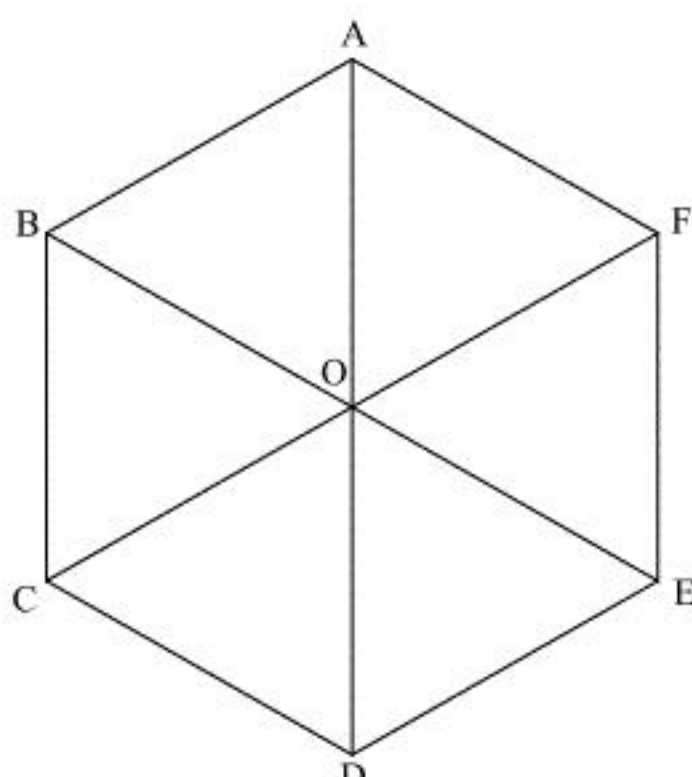


1

(1)

対角線 AD, BE, CF の交点を O とすると、下図のようになる。



上図より、3本の対角線によって正六角形 ABCDEF は6つの等しい正三角形に分けられる。
図形の対称性より、

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OC} = \vec{a} + \vec{b}$$

が成り立つから、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AD} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} \\ &= \vec{a} + (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{b} \\ &= 2(\vec{a} + \vec{b})\end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \overrightarrow{AD} = 2(\vec{a} + \vec{b})$$

(2)

点 P は辺 DE を 2:1 に内分する点であるから、

$$\overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AE}$$

である。ここで、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AE} &= \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FE} \\ &= \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{BC} \\ &= \vec{b} + (\vec{a} + \vec{b}) \\ &= \vec{a} + 2\vec{b}\end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AP} &= \frac{1}{3}(2\vec{a} + 2\vec{b}) + \frac{2}{3}(\vec{a} + 2\vec{b}) \\ &= \frac{4}{3}\vec{a} + 2\vec{b}\end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \overrightarrow{AP} = \frac{4}{3}\vec{a} + 2\vec{b}$$

(3)

点 Q は線分 AP 上の点であるから、実数 t ($0 < t < 1$) を用いて

$$\overrightarrow{AQ} = t\overrightarrow{AP} = \frac{4}{3}t\vec{a} + 2t\vec{b} \quad \dots \textcircled{1}$$

と表される。また、点 Q は線分 BF 上の点であるから、①式の係数の和は1に等しく、

$$\begin{aligned}\frac{4}{3}t + 2t &= 1 \\ \therefore t &= \frac{3}{10}\end{aligned}$$

である。よって、 $\overrightarrow{AQ} = \frac{2}{5}\vec{a} + \frac{3}{5}\vec{b}$ となる。

$$(\text{答}) \quad \overrightarrow{AQ} = \frac{2}{5}\vec{a} + \frac{3}{5}\vec{b}$$

(4)

正六角形の1つの内角の大きさより、 $\angle BAF = 120^\circ$ であるから、

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \cdot 1 \cdot \cos 120^\circ = -\frac{1}{2}$$

である。よって、

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{AQ}|^2 &= \left| \frac{2}{5}\vec{a} + \frac{3}{5}\vec{b} \right|^2 \\ &= \frac{4}{25}|\vec{a}|^2 + \frac{12}{25}\vec{a} \cdot \vec{b} + \frac{9}{25}|\vec{b}|^2 \\ &= \frac{4}{25} + \frac{12}{25} \cdot \left(-\frac{1}{2} \right) + \frac{9}{25} \\ &= \frac{7}{25} \\ \therefore |\overrightarrow{AQ}| &= \frac{\sqrt{7}}{5} \quad (\because |\overrightarrow{AQ}| > 0)\end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad |\overrightarrow{AQ}| = \frac{\sqrt{7}}{5}$$

(1)

背理法を用いて、 $q=s$ であることを示す。すなわち、 $s-q \neq 0$ と仮定して矛盾を導く。与式は、

$$p+q\sqrt{2}=r+s\sqrt{2} \Leftrightarrow (p-r)=(s-q)\sqrt{2}$$

と変形でき、仮定より $s-q \neq 0$ であるから

$$\sqrt{2} = \frac{p-r}{s-q}$$

となる。しかし、 p, q, r, s は全て有理数であるから右辺は有理数であり、これは左辺が無理数であることに矛盾する。したがって、 $s-q=0 \Leftrightarrow s=q$ が示された。さらに、 $s=q$ を与式に代入すると

$$\begin{aligned} p+q\sqrt{2} &= r+q\sqrt{2} \\ \Leftrightarrow p &= r \end{aligned}$$

が成り立つから、題意は示された。

(証明終)

(2)

数学的帰納法を用いて、「すべての自然数 n について、不等式 $\left(1-\frac{1}{n}\right)\sqrt{2} < a_n < \sqrt{2}$ が成り立つ

ことと、 $a_n = p_n + q_n\sqrt{2}$ (p_n および q_n は有理数) と表される」ことを示す。

[1] $n=1$ のとき

$a_1 = 1 = 1 + 0 \cdot \sqrt{2}$ であるから、 $p_1 = 1, q_1 = 0$ として成り立つ。また、

$$\left(1 - \frac{1}{1}\right) \cdot \sqrt{2} = 0 < a_1 < \sqrt{2}$$

が成り立つから、 $n=1$ のとき成立する。

[2] $n=k$ (k は自然数) で成立すると仮定したとき

$n=k+1$ のとき、

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= \sqrt{2} - \frac{a_k}{k+1} \\ &= \sqrt{2} - \left(\frac{p_k}{k+1} + \frac{q_k}{k+1} \sqrt{2} \right) \\ &= -\frac{p_k}{k+1} + \frac{k+1-q_k}{k+1} \sqrt{2} \end{aligned}$$

となる。仮定より、 p_k, q_k は有理数であるから、 $-\frac{p_k}{k+1}, \frac{k+1-q_k}{k+1}$ も有理数である。したがって、 p_{k+1}, q_{k+1} を有理数として、 $a_k = p_{k+1} + q_{k+1}\sqrt{2}$ と表せる。また、仮定より

$$\left(1 - \frac{1}{k}\right) \sqrt{2} < a_k < \sqrt{2}$$

が成り立つから、

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= \sqrt{2} - \frac{a_k}{k+1} \\ &< \sqrt{2} - \frac{1 - \frac{1}{k}}{k+1} \sqrt{2} \\ &\leq \sqrt{2} \quad (\because 1 - \frac{1}{k} \geq 0, k+1 > 0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= \sqrt{2} - \frac{a_k}{k+1} \\ &> \sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{k+1} \\ &= \left(1 - \frac{1}{k+1}\right) \sqrt{2} \end{aligned}$$

が成立し、 $\left(1 - \frac{1}{k+1}\right) \sqrt{2} < a_{k+1} < \sqrt{2}$ が示された。したがって、 $n=k+1$ でも成立する。

以上[1], [2]より、すべての自然数 n について、不等式 $\left(1 - \frac{1}{n}\right) \sqrt{2} < a_n < \sqrt{2}$ が成り立つことと、

$a_n = p_n + q_n\sqrt{2}$ (p_n および q_n は有理数) と表されることが示された。

(証明終)

(3)

(1), (2)より、 $p_{n+1} = -\frac{1}{n+1} p_n$ であることがわかる。両辺に $(n+1)!$ をかけると

$$(n+1)! p_{n+1} = -n! p_n$$

となる。これより、数列 $\{n! p_n\}$ は初項 $1! p_1 = 1$ 、公比 -1 の等比数列であるから、

$$\begin{aligned} n! p_n &= 1 \cdot (-1)^{n-1} = (-1)^{n-1} \\ \therefore p_n &= \frac{(-1)^{n-1}}{n!} \end{aligned}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad p_{n+1} = -\frac{1}{n+1} p_n, \quad p_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n!}$$

3

(1)

$y = f(x)$ を両辺 x で微分すると

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{-x} + x \cdot (-1)e^{-x} \\ &= (1-x)e^{-x} \end{aligned}$$

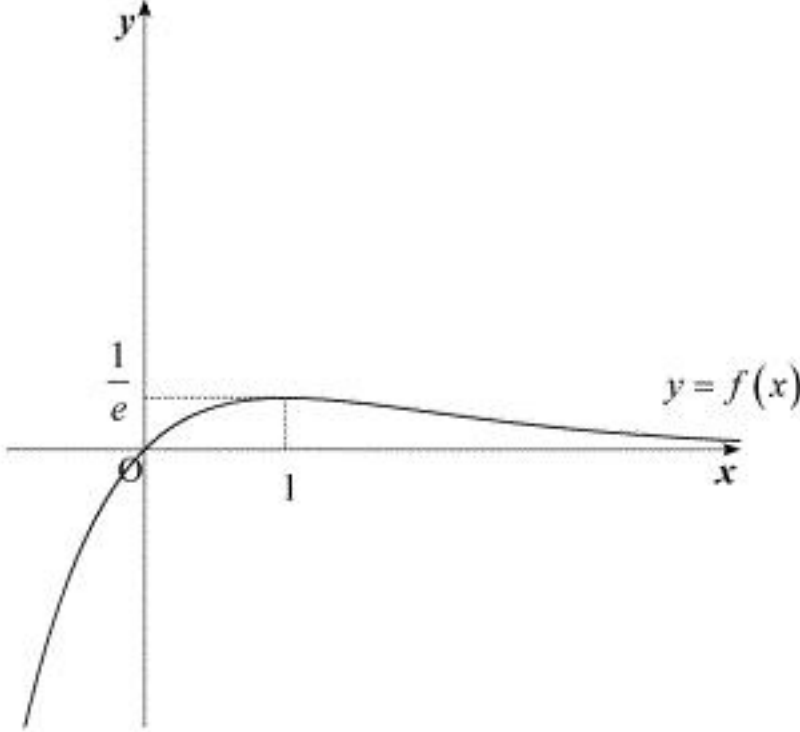
となる。よって増減表は下の通りとなる。

x	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$

ここで,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) &= 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} xe^{-x} = -\infty \end{aligned}$$

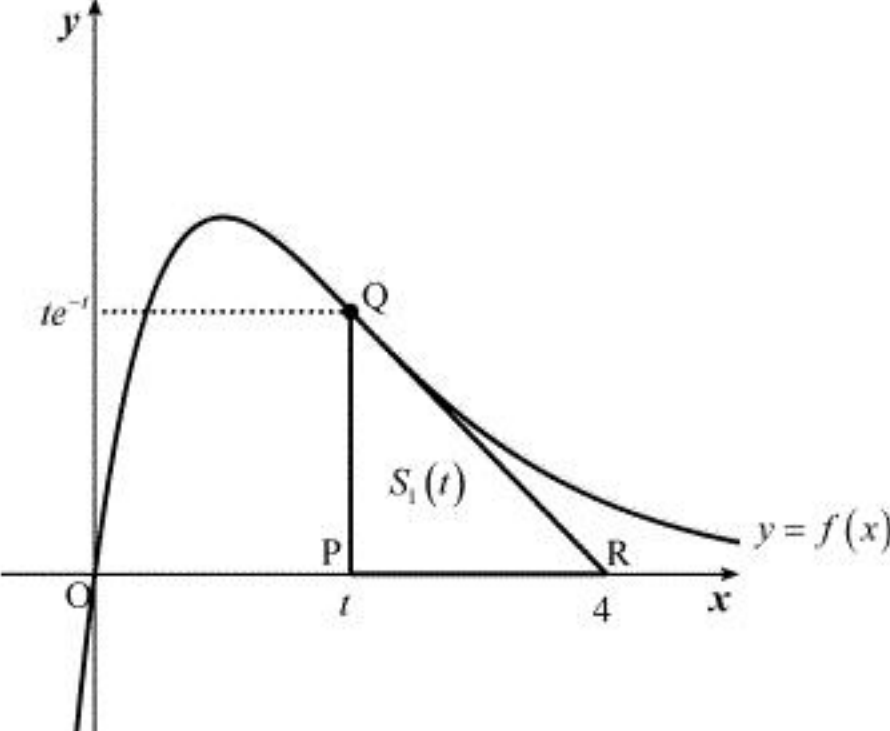
であるから、 $y = f(x)$ の概形は下図の通りとなる。



(答) 前図

(2)

点 P, Q, R を図示すると下の通りとなる。



上図より、 $\triangle PQR$ の面積 $S_1(t)$ は

$$S_1(t) = \frac{1}{2}(4-t)f(t) = \frac{1}{2}t(4-t)e^{-t}$$

である。

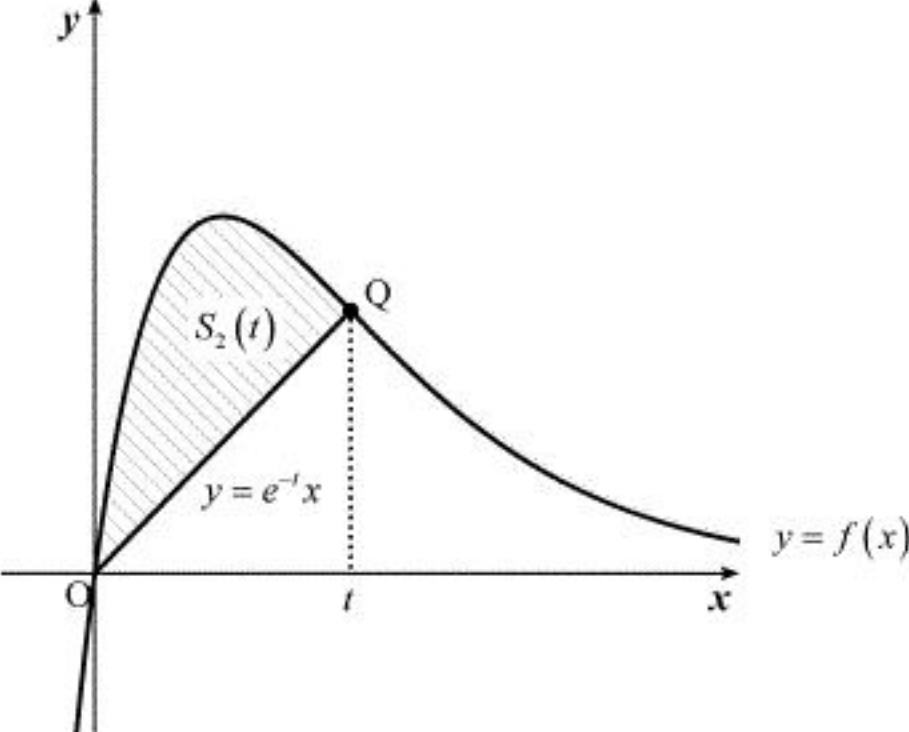
(答) $S_1 = \frac{1}{2}t(4-t)e^{-t}$

(3)

直線 OQ の方程式は

$$y = \frac{te^{-t}}{t}x \Leftrightarrow y = e^{-t}x$$

である。以下に、 $S_2(t)$ が表す図形を斜線部で示す。



上図より,

$$\begin{aligned} S_2(t) &= \int_0^t \{f(x) - e^{-t}x\} dx \\ &= \int_0^t (xe^{-x} - e^{-t}x) dx \end{aligned}$$

である。ここで、部分積分より

$$\begin{aligned} \int_0^t xe^{-x} dx &= [-xe^{-x}]_0^t - \int_0^t (-e^{-x}) dx \\ &= -te^{-t} - [e^{-x}]_0^t \\ &= -(t+1)e^{-t} + 1 \end{aligned}$$

であるから,

$$\begin{aligned} S_2(t) &= \int_0^t xe^{-x} dx - \int_0^t e^{-t}x dx \\ &= -(t+1)e^{-t} + 1 - \left[\frac{1}{2}e^{-t}x^2 \right]_0^t \\ &= -\frac{t^2 + 2t + 2}{2}e^{-t} + 1 \end{aligned}$$

である。

(答) $S_2(t) = -\frac{t^2 + 2t + 2}{2}e^{-t} + 1$

(4)

(2), (3)より

$$\begin{aligned} S(t) &= S_1(t) + S_2(t) \\ &= \frac{-t^2 + 4t}{2}e^{-t} - \frac{t^2 + 2t + 2}{2}e^{-t} + 1 \\ &= -(t^2 - t + 1)e^{-t} + 1 \end{aligned}$$

である。 $S(t)$ を t について微分すると

$$\begin{aligned} S'(t) &= -(2t-1)e^{-t} + (t^2-t+1)e^{-t} \\ &= (t-1)(t-2)e^{-t} \end{aligned}$$

となるから、増減表は以下の通りである。

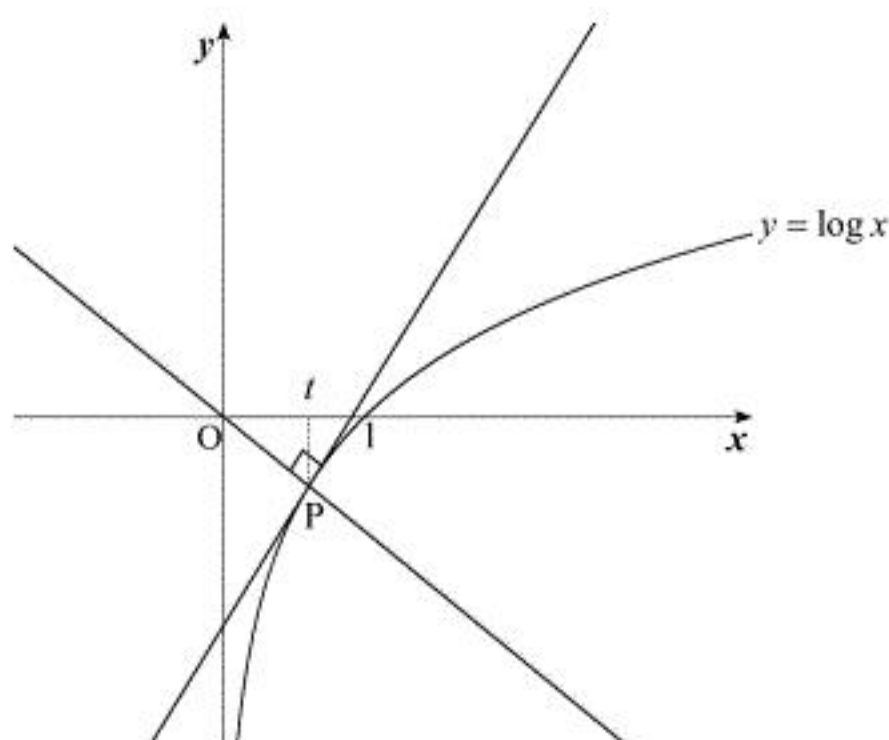
t	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$	(4)
$S'(t)$		+	0	-	0	+	
$S(t)$		$\nearrow$	極大	$\searrow$	極小	$\nearrow$	

上表より、 $S(t)$ は $t=1$ のとき極大値 $1 - \frac{1}{e}$ 、 $t=2$ のとき極小値 $1 - \frac{3}{e^2}$ をとる。

(答) 極大値： $1 - \frac{1}{e}$ ，極小値： $1 - \frac{3}{e^2}$

(1)

曲線 C 、点 P における接線、点 P および原点を通る直線を図示すると下図のようになる。



$y = \log x$ のとき $y' = \frac{1}{x}$ であるから、点 P における接線の傾きは $\frac{1}{t}$ である。また、直線 OP の傾きは $\frac{\log t}{t}$ であるから、この 2 つの直線が直交するための条件は

$$\frac{\log t}{t} \cdot \frac{1}{t} = -1 \Leftrightarrow \log t = -t^2$$

である。

(答) $\log t = -t^2$

(2)

$h(x) = -x^2 + 4x - 3 - 2\log x$ とおくと、

$$\begin{aligned} h'(x) &= -2x + 4 - \frac{2}{x} \\ &= \frac{-2x^2 + 4x - 2}{x} \\ &= -\frac{2(x-1)^2}{x} \end{aligned}$$

であるから、 $0 < x < 1$ において $h'(x) < 0$ であり、その範囲で $h(x)$ は単調減少である。また、

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} h(x) = -1 + 4 - 3 - 0 = 0$$

であるから、 $0 < x < 1$ において、

$$h(x) > 0 \Leftrightarrow 2\log x < -x^2 + 4x - 3$$

が成立する。

(証明終)

(3)

(1) より $\log t = -t^2$ であり、 $-t^2 < 0$ であるから、

$$\log t < 0 \Leftrightarrow t < 1$$

が成立する。真数条件より $t > 0$ であることに注意すると、

$$0 < t < 1 \Leftrightarrow 0 < t^2 < 1$$

が成立する。したがって、初項 t 、公比 t^2 の無限等比級数 S は収束し、その値は

$$S = \frac{t}{1-t^2}$$

である。よって、題意を満たす $f(t), g(t)$ の 1 組は $f(t) = t, g(t) = 1 - t^2$ である。

(答) $f(t) = t, g(t) = 1 - t^2$

S を t の関数と見て微分すると、

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= \frac{1-t^2 - t \cdot (-2t)}{(1-t^2)^2} \\ &= \frac{1+t^2}{(1-t^2)^2} \\ &> 0 \end{aligned}$$

となるから、 S は単調増加である。また、 $0 < t < 1$ であるから、(2) より t のとりうる値の範囲は、

$$\begin{aligned} \log t &< \frac{1}{2}(-t^2 + 4t - 3) \\ \Leftrightarrow -t^2 &< \frac{1}{2}(-t^2 + 4t - 3) \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2}t^2 + 2t - \frac{3}{2} &> 0 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2}\{t - (-2 - \sqrt{7})\}\{t - (-2 + \sqrt{7})\} &> 0 \\ \therefore -2 + \sqrt{7} &< t < 1 \quad (\because 0 < t < 1) \end{aligned}$$

である。したがって、

$$\begin{aligned} S &= \frac{f(t)}{g(t)} \\ &> \frac{f(-2 + \sqrt{7})}{g(-2 + \sqrt{7})} \\ &= \frac{-2 + \sqrt{7}}{-10 + 4\sqrt{7}} \\ &= \frac{(-2 + \sqrt{7})(10 + 4\sqrt{7})}{(4\sqrt{7})^2 - 10^2} \\ &= \frac{4 + \sqrt{7}}{6} \\ &> \frac{4 + 2.6}{6} \quad (\because (2.6)^2 < 7) \\ &= 1.1 \end{aligned}$$

であることが示された。

(証明終)