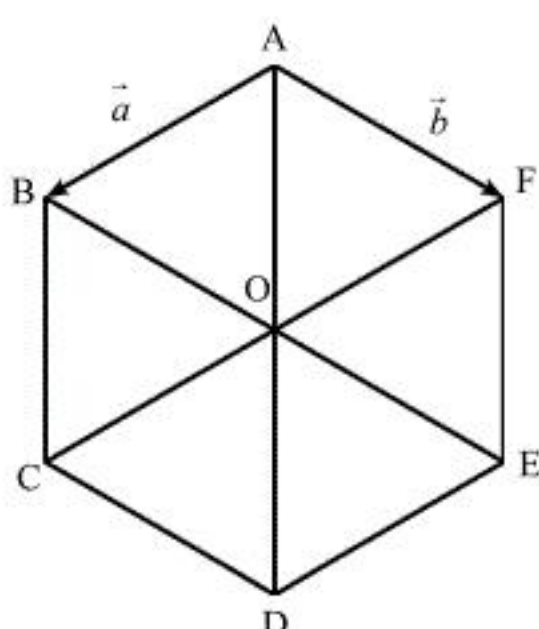


(1)

対角線 AD, BE, CF は1点で交わり、その交点を O とする。以下に、正六角形 ABCDEF および点 O を図示する。



上図より、対角線によって正六角形 ABCDEF は6つの合同な正三角形に分けられる。図形の対称性より、

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OC} = \vec{a} + \vec{b}$$

であるから、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AD} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} \\ &= \vec{a} + (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{b} \\ &= 2\vec{a} + 2\vec{b}\end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \overrightarrow{AD} = 2\vec{a} + 2\vec{b}$$

(2)

(1)と同様に、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AE} &= \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FE} \\ &= \vec{b} + (\vec{a} + \vec{b}) \\ &= \vec{a} + 2\vec{b}\end{aligned}$$

である。点 P は線分 DE を 2:1 に内分する点であるから、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AP} &= \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AE} \\ &= \frac{1}{3}(2\vec{a} + 2\vec{b}) + \frac{2}{3}(\vec{a} + 2\vec{b}) \\ &= \frac{4}{3}\vec{a} + 2\vec{b}\end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \overrightarrow{AP} = \frac{4}{3}\vec{a} + 2\vec{b}$$

(3)

点 Q は直線 AP 上にあるから、ある実数 s を用いて、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AQ} &= s\overrightarrow{AP} \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{AQ} &= \frac{4}{3}s\vec{a} + 2s\vec{b} \quad \dots \textcircled{1}\end{aligned}$$

と表せる。また、点 Q は線分 BF 上にあり、 $\vec{a}, \vec{b}$ は1次独立であるから、①において $\vec{a}, \vec{b}$ の係数和は1に等しく

$$\begin{aligned}\frac{4}{3}s + 2s &= 1 \\ \therefore s &= \frac{3}{10}\end{aligned}$$

である。したがって、 $\overrightarrow{AQ} = \frac{2}{5}\vec{a} + \frac{3}{5}\vec{b}$ である。

$$(\text{答}) \quad \overrightarrow{AQ} = \frac{2}{5}\vec{a} + \frac{3}{5}\vec{b}$$

(4)

$|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$ であり、 $\angle BAF = 120^\circ$ であるから、

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos 120^\circ = -\frac{1}{2}$$

である。したがって、

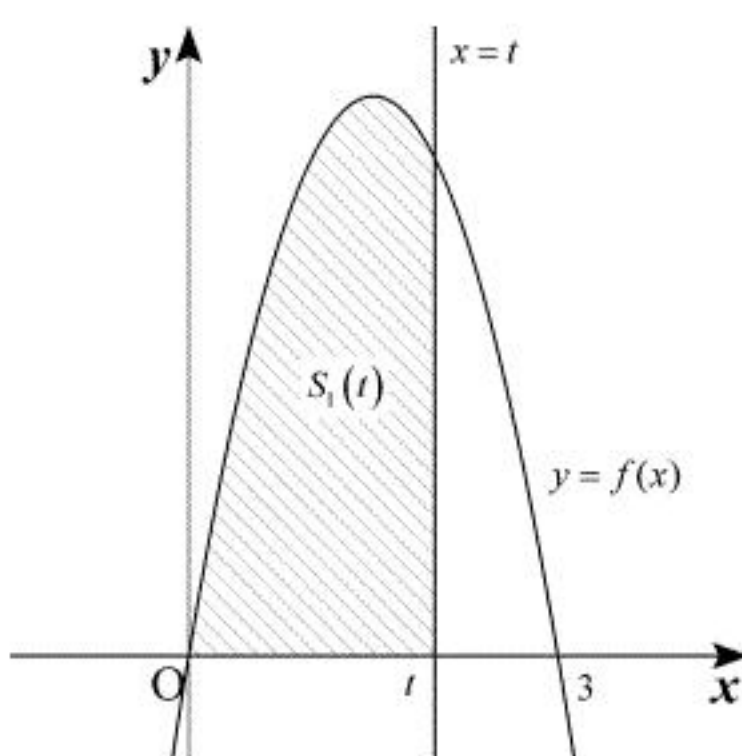
$$\begin{aligned}|\overrightarrow{AQ}|^2 &= \left| \frac{2}{5}\vec{a} + \frac{3}{5}\vec{b} \right|^2 \\ &= \frac{1}{25} \left(4|\vec{a}|^2 + 12\vec{a} \cdot \vec{b} + 9|\vec{b}|^2 \right) \\ &= \frac{7}{25} \\ \therefore |\overrightarrow{AQ}| &= \frac{\sqrt{7}}{5} \quad (\because |\overrightarrow{AQ}| > 0)\end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad |\overrightarrow{AQ}| = \frac{\sqrt{7}}{5}$$

(1)

$0 \leq x \leq t$ の範囲での曲線 $y = f(x)$, x 軸, 直線 $x = t$ で囲まれた図形を以下に斜線部で示す。



上図より,

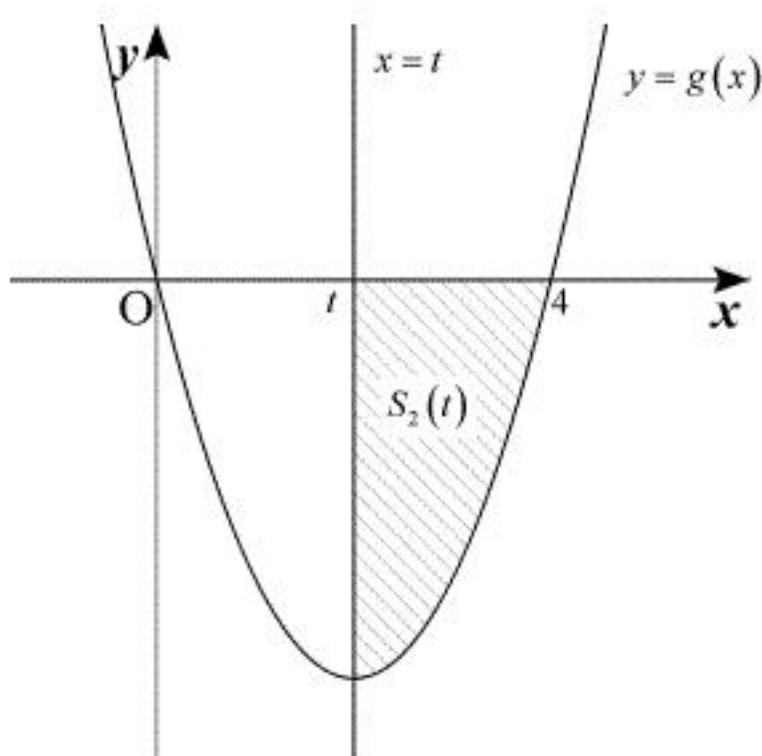
$$\begin{aligned} S_1(t) &= \int_0^t f(x) dx \\ &= \int_0^t (6x - 2x^2) dx \\ &= \left[3x^2 - \frac{2}{3}x^3 \right]_0^t \\ &= -\frac{2}{3}t^3 + 3t^2 \end{aligned}$$

である。

(答) $S_1(t) = -\frac{2}{3}t^3 + 3t^2$

(2)

$t \leq x \leq 4$ の範囲での曲線 $y = g(x)$, x 軸, 直線 $x = t$ で囲まれた図形を以下に斜線部で示す。



上図より,

$$\begin{aligned} S_2(t) &= \int_t^4 \{0 - g(x)\} dx \\ &= \int_t^4 (4x - x^2) dx \\ &= \left[2x^2 - \frac{1}{3}x^3 \right]_t^4 \\ &= \frac{1}{3}t^3 - 2t^2 + \frac{32}{3} \end{aligned}$$

である。

(答) $S_2(t) = \frac{1}{3}t^3 - 2t^2 + \frac{32}{3}$

(3)

(1), (2)より,

$$\begin{aligned} S(t) &= S_1(t) + S_2(t) \\ &= -\frac{1}{3}t^3 + t^2 + \frac{32}{3} \end{aligned}$$

である。 $S(t)$ を t で微分すると,

$$S'(t) = -t^2 + 2t = -t(t-2)$$

であるから, 増減表は以下ようになる。

t	0	...	2	...	3
$S'(t)$		+	0	-	
$S(t)$		↗	極大	↘	

上表より, $S(t)$ は $t=2$ で最大値

$$S(2) = -\frac{1}{3} \cdot 2^3 + 2^2 + \frac{32}{3} = 12$$

をとる。

(答) 最大値: 12

(1)

放物線 C_2 の方程式は、

$$y = (x - a)^2 + 2a$$

とかける。 C_1 と C_2 の方程式から y を消去すると、交点 P の x 座標は

$$x^2 = (x - a)^2 + 2a$$

$$\Leftrightarrow 2ax = a^2 + 2a$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{a}{2} + 1 \quad (\because a > 0)$$

である。これを $y = x^2$ に代入すると、交点 P の y 座標は $y = \left(\frac{a}{2} + 1\right)^2 = \frac{a^2}{4} + a + 1$ と求まる。よ

って、求める座標は $P\left(\frac{a}{2} + 1, \frac{a^2}{4} + a + 1\right)$ である。

$$(\text{答}) \quad P\left(\frac{a}{2} + 1, \frac{a^2}{4} + a + 1\right)$$

(2)

$y = (x - a)^2 + 2a$ の両辺を x で微分すると、

$$y' = 2(x - a) = 2x - 2a$$

であるから、求める接線の方程式は、

$$y = (-a + 2)\left\{x - \left(\frac{a}{2} + 1\right)\right\} + \left(\frac{a^2}{4} + a + 1\right)$$

$$\Leftrightarrow y = (-a + 2)x + \frac{3}{4}a^2 + a - 1$$

である。

$$(\text{答}) \quad y = (-a + 2)x + \frac{3}{4}a^2 + a - 1$$

(3)

(2)より、傾きは $-a + 2$ 、 y 切片は $\frac{3}{4}a^2 + a - 1$ であるから、求める正数 a の値の範囲は

$$\begin{cases} -a + 2 > 0 \\ \frac{3}{4}a^2 + a - 1 > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a < 2 \\ 3a^2 + 4a - 4 > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a < 2 \\ (3a - 2)(a + 2) > 0 \end{cases}$$

$$\therefore \frac{2}{3} < a < 2 \quad (\because a > 0)$$

である。

$$(\text{答}) \quad \frac{2}{3} < a < 2$$

(1)

点Pのy座標は偶数であるから、点Pのx座標とy座標が等しくなるとき、点Pのx座標は偶数である必要がある。すなわち、奇数の目が偶数回出る必要がある。これより、条件をみたすサイコロを3回投げたときの出目の組み合わせは、

$$\{1, 1, 2\}, \{1, 3, 4\}, \{3, 3, 6\}, \{1, 5, 6\}$$

の4通りである。したがって、求める確率は、

$$2 \cdot \frac{3!}{6^3} + 2 \cdot \frac{{}_3C_2}{6^3} = \frac{1}{12}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \frac{1}{12}$$

(2)

求める確率はn回サイコロを投げたとき、2の目が1回、奇数の目がn-1回出る確率であるから、

$${}_nC_1 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^1 \cdot \left(\frac{3}{6}\right)^{n-1} = \frac{n}{3 \cdot 2^n}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \frac{n}{3 \cdot 2^n}$$

(3)

点Pのy座標は偶数であるから、サイコロをn-1回投げ終えたときに点Pのy座標が2以下であるとき、点Pのy座標は0か2である。以下、サイコロをn-1回投げ終えたときの点Pのy座標で場合分けをする。

[1] サイコロをn-1回投げ終えたときの点Pのy座標が0であるとき

サイコロをn-1回投げ終えたときに点Pのy座標が0である確率は、サイコロをn-1回

投げ終えたときに奇数の目がn-1回出る確率であるから、 $\left(\frac{3}{6}\right)^{n-1} = \frac{1}{2^{n-1}}$ である。このと

き、サイコロをn回投げ終えて点Pのy座標が4以上であるのは、n回目で4, 6のいずれかの目が出るときである。よって、サイコロをn-1回投げ終えたときに点Pのy座標が0であり、かつ、サイコロをn回投げ終えて点Pのy座標が4以上である確率は

$$\frac{1}{2^{n-1}} \cdot \frac{2}{6} = \frac{1}{3 \cdot 2^{n-1}}$$

である。

[2] サイコロをn-1回投げ終えたときに点Pのy座標が2である場合

サイコロをn-1回投げ終えたときに点Pのy座標が2である確率は、(2)より、 $\frac{n-1}{3 \cdot 2^{n-1}}$ で

ある。このとき、サイコロをn回投げ終えて点Pのy座標が4以上であるのは、n回目で2, 4, 6のいずれかの目がでるときである。よって、サイコロをn-1回投げ終えたときに点Pのy座標が2であり、かつ、サイコロをn回投げ終えて点Pのy座標が4以上である確率は

$$\frac{n-1}{3 \cdot 2^{n-1}} \cdot \frac{3}{6} = \frac{n-1}{3 \cdot 2^n}$$

である。

以上、[1], [2]より、求める確率は、

$$\frac{1}{3 \cdot 2^{n-1}} + \frac{n-1}{3 \cdot 2^n} = \frac{n+1}{3 \cdot 2^n}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \frac{n+1}{3 \cdot 2^n}$$