

(1)

n が平方数でない自然数とするとき、 $\sqrt{n}$ が有理数となるものが存在すると仮定すると、

$\sqrt{n} = \frac{q}{p}$ (p, q は互いに素な自然数) を満たす n が存在する。両辺を 2 乗して

$$n = \frac{q^2}{p^2} \Leftrightarrow p^2 n = q^2$$

となるが、 $n > 1$ であり、 p と q は互いに素であるから $p = 1$ となる。これより、 $n = q^2$ であるから、 n が平方数となり、これは仮定に矛盾する。したがって、 n が平方数でない自然数とするとき、 $\sqrt{n}$ は無理数である。

(証明終)

(2)

$a\sqrt{n} + b\sqrt{n+1}$ が有理数であると仮定すると、有理数 c を用いて $a\sqrt{n} + b\sqrt{n+1} = c$ とおける。両辺 2 乗すると、

$$\begin{aligned} a^2 n + b^2 (n+1) + 2ab\sqrt{n(n+1)} &= c^2 \\ \Leftrightarrow \sqrt{n(n+1)} &= \frac{c^2 - a^2 n - b^2 (n+1)}{2ab} \quad (\because a > 0, b > 0) \quad \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

となる。ここで、 $n^2 < n(n+1) < (n+1)^2$ であり、 $n^2, (n+1)^2$ が連続した 2 整数の 2 乗であるから、

$n(n+1)$ は平方数でなく、(1) より $\sqrt{n(n+1)}$ は無理数である。また、 a, b, c, n が有理数であるから、①の右辺は有理数である。以上より、①は成り立たず、 $a\sqrt{n} + b\sqrt{n+1}$ は無理数である。

(証明終)

(1)

まず,

$$f(x+y) = f(x)\cos y + f(y)\cos x \quad \cdots \textcircled{1}$$

とおく。①に $x=y=0$ を代入して

$$f(0) = f(0)\cos 0 + f(0)\cos 0 \Leftrightarrow f(0) = 2f(0)$$

$$\therefore f(0) = 0$$

が得られる。

(答) $f(0) = 0$

(2)

①に $x=a, y=h$ を代入すると,

$$f(a+h) = f(a)\cos h + f(h)\cos a$$

$$\Leftrightarrow f(a+h) - f(a) = -f(a)(1 - \cos h) + f(h)\cos a$$

となる。ここで、 $f(x)$ は $x=0$ で微分可能であるから、 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h - 0} = f'(0)$ であることに

注意すると,

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-f(a)(1 - \cos h) + f(h)\cos a}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{-f(a)(1 - \cos h)(1 + \cos h)}{h(1 + \cos h)} + \frac{f(h)}{h} \cos a \right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(-f(a) \cdot \frac{\sin h}{h} \cdot \frac{\sin h}{1 + \cos h} + \frac{f(h) - f(0)}{h - 0} \cdot \cos a \right) \\ &= -f(a) \cdot 1 \cdot 0 + f'(0) \cdot \cos a \\ &= f'(0) \cdot \cos a \end{aligned}$$

となる。したがって、微分係数 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ は存在し、 $f(x)$ は $x=a$ で微分可能である。

(証明終)

(3)

 $f'(0) = 3$, および(2)の結果より、 $f'(x) = 3\cos x$ とわかる。ここで,

$$f(x) = \int f'(x) dx = 3 \int \cos x dx = 3\sin x + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

であり、(1)より $C=0$ が得られる。したがって、 $f(x) = 3\sin x$ である。(答) $f'(x) = 3\cos x, f(x) = 3\sin x$

3

(1)

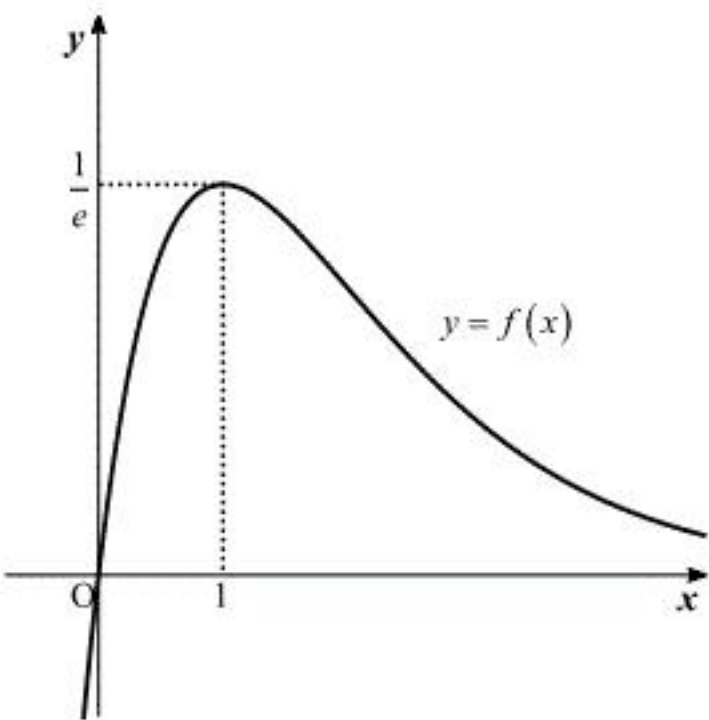
$f(x)$ の導関数は、

$$f'(x) = 1 \cdot e^x + x(-e^{-x}) = (1-x)e^{-x}$$

である。 $f'(x) = 0$ を満たす x は $x = 1$ であるから、 $f(x)$ の増減表は以下のようになる。

x	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$

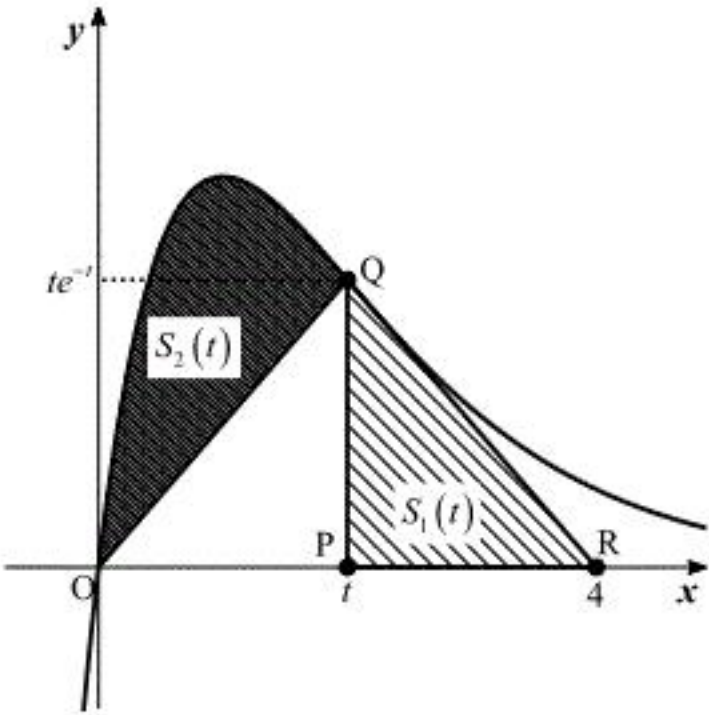
また、 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$ より、 $y = f(x)$ の概形は以下のようになる。



(答) 前図

(2)

以下に、 $S_1(t)$ を斜線部で、 $S_2(t)$ を打点部で示す。



上図より、 $PQ = te^{-t}$, $PR = 4 - t$ であるから、

$$S_1(t) = \frac{1}{2} \cdot te^{-t} \cdot (4 - t) = \frac{1}{2}(4 - t)te^{-t}$$

である。

(答) $S_1(t) = \frac{1}{2}(4 - t)te^{-t}$

(3)

直線 OQ の方程式は

$$y = \frac{te^{-t}}{t}x \Leftrightarrow y = e^{-t}x$$

である。(1)の図より、 $e^{-t}x \leq xe^{-x}$ であるから、

$$\begin{aligned} S_2(t) &= \int_0^t (xe^{-x} - e^{-t}x) dx \\ &= \left[-xe^{-x} \right]_0^t + \int_0^t e^{-x} dx - \left[\frac{1}{2}e^{-t}x^2 \right]_0^t \\ &= -te^{-t} + \left[-e^{-x} \right]_0^t - \frac{1}{2}e^{-t}t^2 \\ &= \left(-\frac{1}{2}t^2 - t - 1 \right) e^{-t} + 1 \end{aligned}$$

である。

(答) $S_2(t) = \left(-\frac{1}{2}t^2 - t - 1 \right) e^{-t} + 1$

(4)

(2), (3)の結果より、

$$S(t) = S_1(t) + S_2(t) = \left(-t^2 + t - 1 \right) e^{-t} + 1$$

である。よって、

$$\begin{aligned} S'(t) &= (-2t + 1)e^{-t} + (-t^2 + t - 1)(-e^{-t}) \\ &= (t^2 - 3t + 2)e^{-t} \\ &= (t - 1)(t - 2)e^{-t} \end{aligned}$$

となるから、 $0 < t < 4$ における $S(t)$ の増減表は以下のようになる。

t	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$	4
$S'(t)$		+	0	-	0	+	
$S(t)$		$\nearrow$	極大	$\searrow$	極小	$\nearrow$	

上表より、 $S(t)$ は $t = 1$ で極大値 $S(1) = -e^{-1} + 1$, $t = 2$ で極小値 $S(2) = -3e^{-2} + 1$ をとる。

(答) 極大値： $-e^{-1} + 1$ ($t = 1$), 極小値： $-3e^{-2} + 1$ ($t = 2$)

(1)

$y' = \frac{1}{x}$ より, 点 $P(t, \log t)$ における接線の傾きは $\frac{1}{t}$ である。また, 点 P および原点を通る直線

の傾きは $\frac{\log t}{t}$ であるから, これら 2 直線が垂直に交わる時,

$$\frac{1}{t} \cdot \frac{\log t}{t} = -1 \Leftrightarrow \log t = -t^2$$

を満たす。

(答) $\log t = -t^2$

(2)

いま,

$$h(x) = -x^2 + 4x - 3 - 2\log x$$

とおくと,

$$h'(x) = -2x + 4 - \frac{2}{x} = \frac{-2(x-1)^2}{x}$$

であり, $0 < x < 1$ の範囲で $h'(x) < 0$ であるから, $h(x)$ は単調減少である。ゆえに,

$$h(x) > h(1) = -1 + 4 - 3 - 0 = 0$$

であるから, $0 < x < 1$ の範囲で

$$h(x) > 0 \Leftrightarrow 2\log x < -x^2 + 4x - 3$$

が成り立つ。

(証明終)

(3)

真数条件より $t > 0$ であり, (1) より

$$\begin{aligned} \log t &= -t^2 < 0 \\ \therefore 0 < t < 1 \quad (\because t > 0) \end{aligned}$$

を満たす。このとき, 無限等比級数 $\sum_{n=1}^{\infty} t^{2n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} t \cdot (t^2)^{n-1}$ は収束し, その値は

$$\sum_{n=1}^{\infty} t^{2n-1} = \frac{t}{1-t^2}$$

である。したがって, $S = \frac{f(t)}{g(t)}$ となるような t についての整式の一組として

$$f(t) = t, g(t) = 1 - t^2$$

が得られる。

(答) $f(t) = t, g(t) = 1 - t^2$

また, (1), (2) より,

$$\begin{aligned} -t^2 + 4t - 3 &> 2\log t \\ \Leftrightarrow -t^2 + 4t - 3 &> -2t^2 \\ \Leftrightarrow t^2 + 4t - 3 &> 0 \\ \therefore -2 + \sqrt{7} < t < 1 \quad (\because 0 < t < 1) \end{aligned}$$

となる。ここで,

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1-t^2 - t \cdot (-2t)}{(1-t^2)^2} = \frac{1+t^2}{(1-t^2)^2} > 0$$

であるから, S は単調増加である。よって

$$S > \frac{-2 + \sqrt{7}}{1 - (-2 + \sqrt{7})^2} = \frac{\sqrt{7} - 2}{2(2\sqrt{7} - 5)} = \frac{4 + \sqrt{7}}{6}$$

となる。ここで, $(2.6)^2 = 6.76$ より,

$$7 > (2.6)^2 \Leftrightarrow \sqrt{7} > 2.6$$

であるから,

$$S > \frac{4 + \sqrt{7}}{6} > \frac{6.6}{6} = 1.1$$

となる。

(証明終)