前期日程

平成30年度入学試験問題（前期日程）

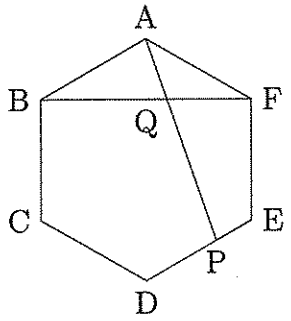
数　　学

（理工学部）

―――― 解答上の注意事項 ――――

1. 「解答始め」の合図があるまで問題を見てはならない。
2. 問題冊子1冊および解答紙4枚がある。解答紙は1枚ずつ切り離して使用すること。
3. 問題は $\boxed{1}$ から $\boxed{4}$ まで4問ある。各問の解答は所定の解答紙にのみ記入すること。
4. 解答紙の裏面を使う場合は，続きの解答を裏面の仕切り線の下に記入すること。
5. 解答しない問題がある場合でも，解答紙4枚すべてを提出すること。
6. 問題冊子は持ち帰ること。

1 下の図のような1辺の長さが1の正六角形ABCDEFにおいて，線分DEを2 : 1に内分する点をPとし，直線APと直線BFの交点をQとする。$\overrightarrow{AB} = \vec{a}$，$\overrightarrow{AF} = \vec{b}$ とおくとき，次の問に答えよ。



(1) $\overrightarrow{AD}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

(2) $\overrightarrow{AP}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

(3) $\overrightarrow{AQ}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

(4) $|\overrightarrow{AQ}|$ の値を求めよ。

$\boxed{2}$ 数列 $\{a_n\}$ は

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = \sqrt{2} - \dfrac{a_n}{n+1} \quad (n = 1, 2, \cdots) \end{cases}$$

で定められているとする。このとき，次の問に答えよ。

(1) 4つの有理数 p，q，r，s が

$$p + q\sqrt{2} = r + s\sqrt{2}$$

を満たすとする。このとき，$p = r$ かつ $q = s$ であることを示せ。ただし，$\sqrt{2}$ が無理数であることは用いてよい。

(2) 不等式

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)\sqrt{2} < a_n < \sqrt{2}$$

が成立することと，$a_n = p_n + q_n\sqrt{2}$（p_n および q_n は有理数）と表されることを n に関する数学的帰納法を用いて示せ。

(3) (2) で定義された数列 $\{p_n\}$ に対して，p_{n+1} と p_n が満たす関係式，および一般項 p_n を求めよ。

$\boxed{3}$ $f(x) = xe^{-x}$ とする。O$(0,0)$，P$(t,0)$，Q$(t, f(t))$，R$(4,0)$ とする。ただし，$0 < t < 4$ とする。△PQR の面積を $S_1(t)$ とし，線分 OQ と曲線 $y = f(x)$ で囲まれた図形の面積を $S_2(t)$ とする。$S(t) = S_1(t) + S_2(t)$ とおく。このとき，次の問に答えよ。

(1) 曲線 $y = f(x)$ の概形をかけ。ただし，$\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$ は用いてよい。

(2) $S_1(t)$ を t を用いて表せ。

(3) $S_2(t)$ を t を用いて表せ。

(4) $S(t)$ の極値を求めよ。

$\boxed{4}$ 曲線 $C: y = \log x$ 上の点 $\mathrm{P}(t, \log t)$ をとる。ただし，点 P および原点を通る直線と点 P における曲線 C の接線が垂直に交わっているものとする。このとき，次の問に答えよ。

(1) $\log t$ を t についての整式で表せ。

(2) $0 < x < 1$ の範囲で不等式

$$2\log x < -x^2 + 4x - 3$$

が成立することを示せ。

(3) $S = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} t^{2n-1}$ とおく。$S = \dfrac{f(t)}{g(t)}$ となるような t についての整式 $f(t)$, $g(t)$ を一組求めよ。また，$S > 1.1$ となることを示せ。