

(1)

倍角の公式を用いて、

$$\begin{aligned}\sin 2x &= 2 \sin x \cos x \\ &= (\sin x + \cos x)^2 - (\sin^2 x + \cos^2 x) \\ &= t^2 - 1\end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \sin 2x = t^2 - 1$$

(2)

三角関数の合成を用いて、

$$\begin{aligned}t &= \sin x + \cos x \\ &= \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\end{aligned}$$

となる。ここで x はすべての実数をとるので、 t の動く範囲は $-\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2}$ となる。

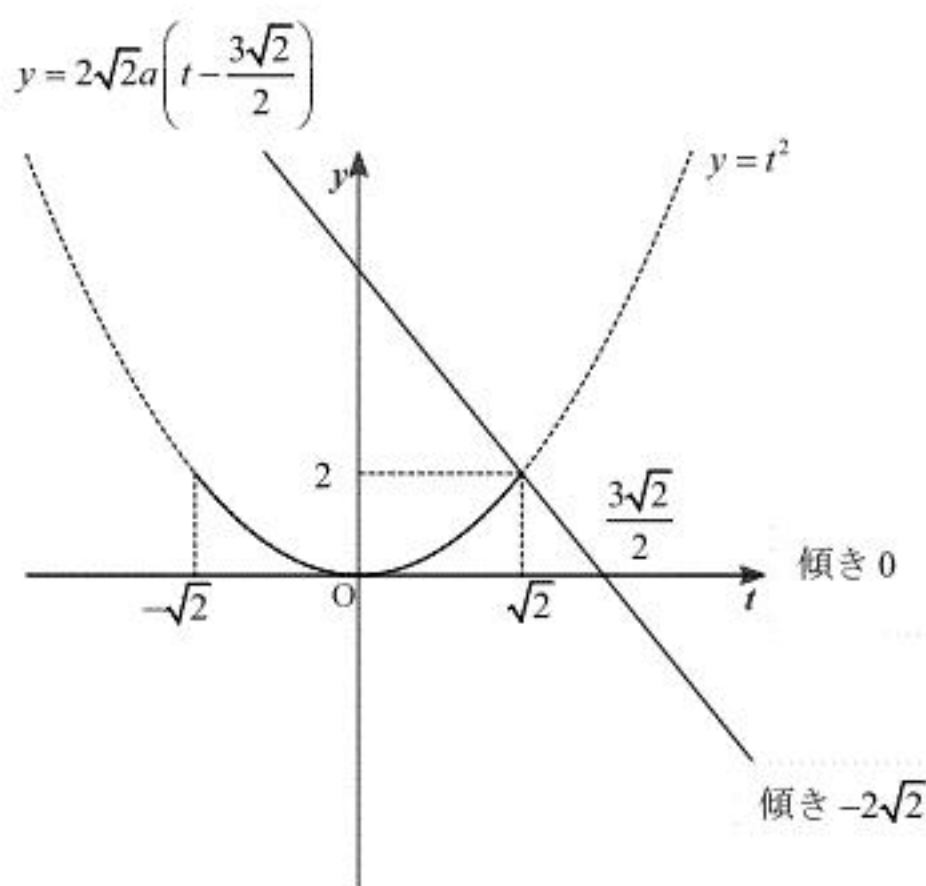
$$(\text{答}) -\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2}$$

(3)

$$\begin{aligned}\sin 2x - 2\sqrt{2}a(\sin x + \cos x) + 6a + 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow (t^2 - 1) - 2\sqrt{2}at + 6a + 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow t^2 - 2\sqrt{2}at + 6a &= 0 \\ \Leftrightarrow t^2 &= 2\sqrt{2}a\left(t - \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)\end{aligned}$$

と変形できる。方程式が解を持つ条件は、 $t^2 = 2\sqrt{2}a\left(t - \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$ をみたす t ($-\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2}$) が存

在することで、これは放物線 $y = t^2$ と直線 $y = 2\sqrt{2}a\left(t - \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$ が $-\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2}$ に共有点を持つことに等しい。



直線 $y = 2\sqrt{2}a\left(t - \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$ は点 $\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}, 0\right)$ を通る傾き $2\sqrt{2}a$ の直線であることを考えると、放物

線との共有点を持つとき、傾きが最小となるのは点 $(\sqrt{2}, 2)$ を通るときで、傾きが最大となる

のは点 $(0, 0)$ を通るときである。よって、傾きが最小のとき、直線は $\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}, 0\right), (\sqrt{2}, 2)$ を通るから

$$\begin{aligned}2\sqrt{2}a &= \frac{0 - 2}{\frac{3\sqrt{2}}{2} - \sqrt{2}} \\ \Leftrightarrow 2\sqrt{2}a &= -2\sqrt{2} \\ \Leftrightarrow a &= -1\end{aligned}$$

となる。傾きが最大するとき、その傾きは 0 であるから、

$$\begin{aligned}2\sqrt{2}a &= 0 \\ \Leftrightarrow a &= 0\end{aligned}$$

となる。放物線と直線が共有点を持つとき、 a は -1 と 0 の間を動くから、求める a の範囲は、

$$-1 \leq a \leq 0$$

である。

$$(\text{答}) -1 \leq a \leq 0$$

(1)

$y = x^2$ と $y = 2ax - a^3$ を連立して、

$$x^2 = 2ax - a^3$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2ax + a^3 = 0$$

となる。この方程式が異なる2つの実数解を持てばいいので、この方程式の判別式を D としたとき、

$$\frac{D}{4} > 0$$

$$\Leftrightarrow a^2 - a^3 > 0$$

$$\Leftrightarrow a^2(a-1) < 0$$

$$\therefore a < 0, 0 < a < 1$$

となる。 a は正なので、 $0 < a < 1$ である。

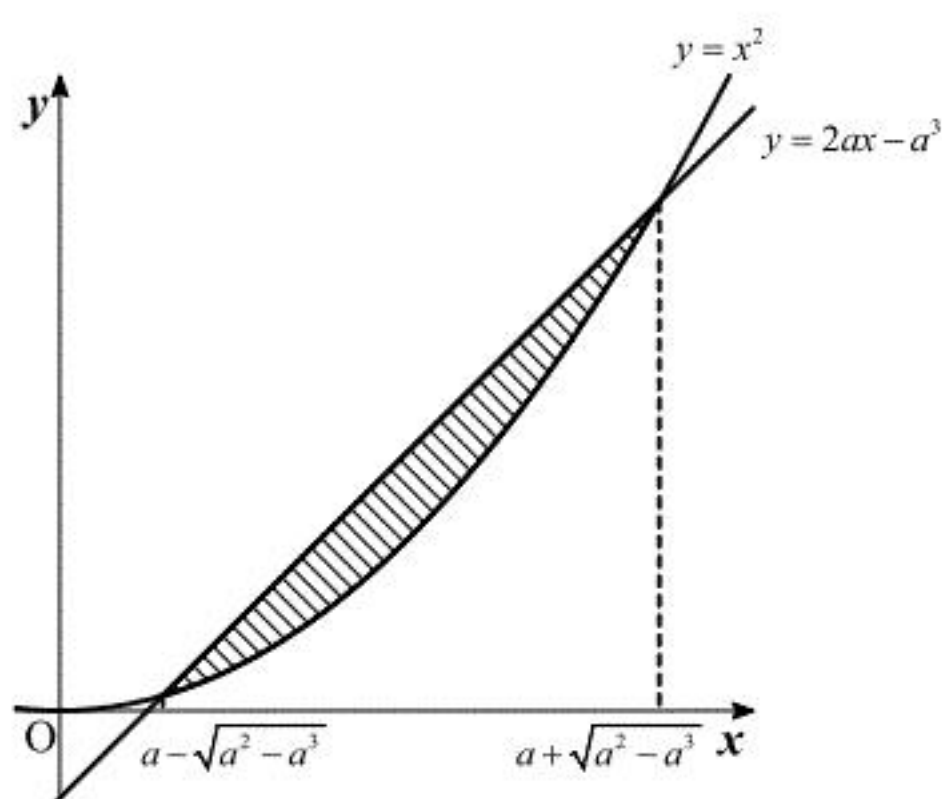
(答) $0 < a < 1$

(2)

(1)のとき異なる2つの解 α, β は、

$$\alpha = a - \sqrt{a^2 - a^3}, \beta = a + \sqrt{a^2 - a^3}$$

となる。 C, l の位置関係は以下のようになる。



$\frac{1}{6}$ 公式を用いて、

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} \{(2ax - a^3) - x^2\} dx$$

$$= -\int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)(x - \beta) dx$$

$$= \frac{1}{6}(\beta - \alpha)^3$$

$$= \frac{1}{6}(2\sqrt{a^2 - a^3})^3$$

$$= \frac{4}{3}(a^2 - a^3)^{\frac{3}{2}}$$

となる。

(答) $S = \frac{4}{3}(a^2 - a^3)^{\frac{3}{2}}$

(3)

$g(a) = a^2 - a^3$ とおく(ただし $0 < a < 1$ である)。このとき $g'(a)$ は、

$$g'(a) = 2a - 3a^2$$

$$= a(2 - 3a)$$

となる。 $g(a)$ の増減表は以下のとおりである。

a	0	...	$\frac{2}{3}$	...	1
$g'(a)$		+	0	-	
$g(a)$		$\nearrow$	$\frac{4}{27}$	$\searrow$	

よって $a = \frac{2}{3}$ で最大値 $\frac{4}{27}$ をとる。このとき S の値も最大値をとり、その値は

$$S = \frac{4}{3} \left\{ g\left(\frac{2}{3}\right) \right\}^{\frac{3}{2}}$$

$$= \frac{32\sqrt{3}}{729}$$

となる。

(答) $a = \frac{2}{3}$ で最大値 $\frac{32\sqrt{3}}{729}$

(1)

ベクトルの三角形の面積の公式を用いて、

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{1}{2} \sqrt{|\overrightarrow{OA}|^2 |\overrightarrow{OB}|^2 - (\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB})^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{2^2 \cdot 2^2 - (-1)^2} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{\sqrt{3}}{2}$$

(2)

$\overrightarrow{CP}$ の成分を求めると、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{CP} &= \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OC} \\ &= s\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} \\ &= (s-1, t-1, -s+t-1)\end{aligned}$$

となる。ここで、 $\overrightarrow{CP} \perp \triangle OAB$ のとき、 $\overrightarrow{CP} \perp \overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{CP} \perp \overrightarrow{OB}$ である。ここで $\overrightarrow{CP} = \vec{0}$ と仮定すると $s-1=t-1=0$ より $s=t=1$ だが、このとき $-s+t-1 \neq 0$ より、 $\overrightarrow{CP} = \vec{0}$ とはならない。したがって、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{CP} &\perp \overrightarrow{OA} \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{CP} \cdot \overrightarrow{OA} &= 0 \\ \Leftrightarrow (s-1, t-1, -s+t-1) \cdot (1, 0, -1) &= 0 \\ \therefore 2s-t &= 0 \\ \overrightarrow{CP} &\perp \overrightarrow{OB} \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{CP} \cdot \overrightarrow{OB} &= 0 \\ \Leftrightarrow (s-1, t-1, -s+t-1) \cdot (0, 1, 1) &= 0 \\ \therefore -s+2t-2 &= 0\end{aligned}$$

となる。このとき、

$$s = \frac{2}{3}, t = \frac{4}{3}$$

となるので、

$$\overrightarrow{CP} = \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3} \right)$$

である。

$$(\text{答}) \quad s = \frac{2}{3}, t = \frac{4}{3}, \overrightarrow{CP} = \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3} \right)$$

(3)

まず k を求める。

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{OE}| &= \alpha \\ \Leftrightarrow k|\overrightarrow{CP}| &= \alpha \\ \Leftrightarrow k\sqrt{\left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2} &= \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{3}k &= \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \therefore k &= \frac{3}{2}\end{aligned}$$

となる。よって、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{DE} &= \overrightarrow{OE} - \overrightarrow{OD} \\ &= k\overrightarrow{CP} - \overrightarrow{OD} \\ &= \left(-\frac{1}{2}, 1, -1 \right)\end{aligned}$$

となる。また、重心の公式を用いて、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OG} &= \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) \\ &= \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3} \right)\end{aligned}$$

となる。最後に、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OG} \cdot \overrightarrow{DE} &= \left(-\frac{1}{2}, 1, -1 \right) \cdot \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3} \right) \\ &= 0\end{aligned}$$

となる。よって、 $\overrightarrow{OG} \neq \vec{0}$, $\overrightarrow{DE} \neq \vec{0}$ より $\overrightarrow{OG} \perp \overrightarrow{DE}$ である。

(証明終)