

(1)

$t=0, 9, 10$  のとき、当たりくじをちょうど1回引くことはないので確率は0となる。

$t \neq 0, 9, 10$  のとき、くじ3本の選び方は、

$${}_{10}C_3 = 120 \text{ (通り)}$$

であり、これらは同様に確からしく起こる。当たりくじ1本の選び方は、

$${}_tC_1 = t \text{ (通り)}$$

であり、はずれくじ2本の選び方は、

$${}_{10-t}C_2 = \frac{(10-t)(9-t)}{2} \text{ (通り)}$$

である。よって当たりくじをちょうど1本引く確率は、

$$\frac{t \cdot \frac{(10-t)(9-t)}{2}}{120} = \frac{t(10-t)(9-t)}{240}$$

である。これは  $t=0, 9, 10$  のときも成り立つ。

$$\text{(答)} \quad \frac{t(10-t)(9-t)}{240}$$

(2)

$t=8, 9, 10$  のとき、当たりくじを引く数が0回になることはないので確率は0となる。

$t \neq 8, 9, 10$  のとき、すべてはずれくじを引く確率は、

$$\frac{10-t}{10} \cdot \frac{9-t}{9} \cdot \frac{8-t}{8} = \frac{(10-t)(9-t)(8-t)}{720}$$

となる。これは  $t=8, 9, 10$  のときも成り立つ。よって当たりくじが1本以下になる確率は、

$$\begin{aligned} P(t) &= \frac{t(10-t)(9-t)}{240} + \frac{(10-t)(9-t)(8-t)}{720} \\ &= \frac{(10-t)(9-t)(t+4)}{360} \end{aligned}$$

となる。

$$\text{(答)} \quad \frac{(10-t)(9-t)(t+4)}{360}$$

(3)

与えられた不等式を解くと、

$$P(t) \leq \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(10-t)(9-t)(t+4)}{360} \leq \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow (t-5)(t^2-10t-36) \leq 0$$

$$\therefore t \leq 5 - \sqrt{61}, \quad 5 \leq t \leq 5 + \sqrt{61}$$

となる。 $t$  は0以上10以下の整数なので、

$$t = 5, 6, 7, 8, 9, 10$$

である。

$$\text{(答)} \quad t = 5, 6, 7, 8, 9, 10$$

(1)

ベクトルの三角形の面積の公式を用いて、

$$\begin{aligned}
 \alpha &= \frac{1}{2} \sqrt{|\overrightarrow{OA}|^2 |\overrightarrow{OB}|^2 - (\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB})^2} \\
 &= \frac{1}{2} \sqrt{(\sqrt{2})^2 \cdot (\sqrt{2})^2 - (-1)^2} \\
 &= \frac{\sqrt{3}}{2}
 \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{\sqrt{3}}{2}$$

(2)

 $\overrightarrow{CP}$  の成分を求めると、

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{CP} &= \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OC} \\
 &= s\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} \\
 &= (s-1, t-1, -s+t-1)
 \end{aligned}$$

となる。ここで、 $\overrightarrow{CP} = \vec{0}$  となるとき、

$$\begin{cases} s-1=0 \\ t-1=0 \\ -s+t-1=0 \end{cases}$$

となるが、これを満たす実数  $s, t$  は存在しないから  $\overrightarrow{CP} \neq \vec{0}$  である。 $\overrightarrow{CP} \perp \triangle OAB$  のとき、 $\overrightarrow{CP} \perp \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{CP} \perp \overrightarrow{OB}$  であるから、

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{CP} &\perp \overrightarrow{OA} \\
 \Leftrightarrow \overrightarrow{CP} \cdot \overrightarrow{OA} &= 0 \\
 \Leftrightarrow (s-1, t-1, -s+t-1) \cdot (1, 0, -1) &= 0 \\
 \therefore 2s-t &= 0 \\
 \overrightarrow{CP} &\perp \overrightarrow{OB} \\
 \Leftrightarrow \overrightarrow{CP} \cdot \overrightarrow{OB} &= 0 \\
 \Leftrightarrow (s-1, t-1, -s+t-1) \cdot (0, 1, 1) &= 0 \\
 \therefore -s+2t-2 &= 0
 \end{aligned}$$

となる。このとき、

$$s = \frac{2}{3}, t = \frac{4}{3}$$

となるので、

$$\overrightarrow{CP} = \left( -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3} \right)$$

である。

$$(\text{答}) \quad s = \frac{2}{3}, t = \frac{4}{3}, \overrightarrow{CP} = \left( -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3} \right)$$

(3)

まず  $k$  を求める。

$$\begin{aligned}
 |\overrightarrow{OE}| &= \alpha \\
 \Leftrightarrow k|\overrightarrow{CP}| &= \alpha \\
 \Leftrightarrow k\sqrt{\left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2} &= \frac{\sqrt{3}}{2} \\
 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{3}k &= \frac{\sqrt{3}}{2} \\
 \therefore k &= \frac{3}{2}
 \end{aligned}$$

となる。よって、

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{DE} &= \overrightarrow{OE} - \overrightarrow{OD} \\
 &= k\overrightarrow{CP} - \overrightarrow{OD} \\
 &= \left( -\frac{1}{2}, 1, -1 \right)
 \end{aligned}$$

となる。また、重心の公式を用いて、

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{OG} &= \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) \\
 &= \left( \frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3} \right)
 \end{aligned}$$

となる。最後に、

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{OG} \cdot \overrightarrow{DE} &= \left( -\frac{1}{2}, 1, -1 \right) \cdot \left( \frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3} \right) \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

となる。よって、 $\overrightarrow{OG} \neq \vec{0}, \overrightarrow{DE} \neq \vec{0}$  より、 $\overrightarrow{OG} \perp \overrightarrow{DE}$  である。

(証明終)

(1)

各定積分を計算すると、

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} \cos^2 x dx &= \int_0^{\pi} \frac{1+\cos 2x}{2} dx \\ &= \left[ \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x \right]_0^{\pi} \\ &= \frac{1}{2}\pi\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} \sin^2 x dx &= \int_0^{\pi} \frac{1-\cos 2x}{2} dx \\ &= \left[ \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x \right]_0^{\pi} \\ &= \frac{1}{2}\pi\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} \sin x \cos x dx &= \int_0^{\pi} \frac{1}{2} \sin 2x dx \\ &= \left[ -\frac{1}{4}\cos 2x \right]_0^{\pi} \\ &= 0\end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \int_0^{\pi} \cos^2 x dx = \frac{1}{2}\pi, \quad \int_0^{\pi} \sin^2 x dx = \frac{1}{2}\pi, \quad \int_0^{\pi} \sin x \cos x dx = 0$$

(2)

回転体の体積の公式を用いて、

$$\begin{aligned}V &= \pi \int_0^{\pi} y^2 dx \\ &= \pi \int_0^{\pi} \left( a \sin x + \frac{a}{a-1} \cos x \right)^2 dx \\ &= a^2 \pi \int_0^{\pi} \sin^2 x dx + \frac{2a^2}{a-1} \pi \int_0^{\pi} \sin x \cos x dx + \frac{a^2}{(a-1)^2} \pi \int_0^{\pi} \cos^2 x dx \\ &= \frac{1}{2} \pi^2 \left\{ a^2 + \frac{a^2}{(a-1)^2} \right\}\end{aligned}$$

となる。

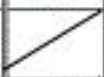
$$(\text{答}) \quad \frac{1}{2} \pi^2 \left\{ a^2 + \frac{a^2}{(a-1)^2} \right\}$$

(3)

$f(a) = a^2 + \frac{a^2}{(a-1)^2}$  とおく。このとき  $f'(a)$  は、

$$\begin{aligned}f'(a) &= 2a + \frac{2a(a-1)^2 - a^2 \cdot 2(a-1)}{(a-1)^4} \\ &= \frac{2a(a-2)(a^2 - a + 1)}{(a-1)^3} \\ &= \frac{2a(a-2) \left\{ \left( a - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{3}{4} \right\}}{(a-1)^3}\end{aligned}$$

となる。よって増減表は以下の通り。

|         |                                                                                     |                                                                                     |   |                                                                                     |
|---------|-------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|---|-------------------------------------------------------------------------------------|
| $a$     | (1)                                                                                 | ...                                                                                 | 2 | ...                                                                                 |
| $f'(a)$ |  | -                                                                                   | 0 | +                                                                                   |
| $f(a)$  |  |  | 8 |  |

したがって、 $f(a)$  は  $a=2$  のとき最小値 8 をとる。このとき  $V$  も最小値をとり、その値は

$$\frac{1}{2} \pi^2 f(2) = 4\pi^2 \text{ となる。}$$

$$(\text{答}) \quad a=2 \text{ のとき最小値 } 4\pi^2$$

(1)

ド・モアブルの定理を用いて,

$$\begin{aligned}
 \alpha^7 &= (\cos \theta + i \sin \theta)^7 \\
 &= \cos 7\theta + i \sin 7\theta \\
 &= \cos 2\pi + i \sin 2\pi \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

となる。また  $\alpha \neq 1$  より, 等比数列の公式を利用すると,

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=0}^6 \alpha^k &= \alpha^6 + \alpha^5 + \alpha^4 + \alpha^3 + \alpha^2 + \alpha + 1 \\
 &= \frac{\alpha^7 - 1}{\alpha - 1} \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

となる。

(証明終)

(2)

ド・モアブルの定理を用いて,

$$\begin{aligned}
 \alpha + \frac{1}{\alpha} &= \alpha + \alpha^{-1} \\
 &= (\cos \theta + i \sin \theta) + \{\cos(-\theta) + i \sin(-\theta)\} \\
 &= 2 \cos \theta
 \end{aligned}$$

となる。これと(1)の結果を用いて,

$$\begin{aligned}
 f(\cos \theta) &= 8 \cos^3 \theta + 4 \cos^2 \theta - 4 \cos \theta - 1 \\
 &= (2 \cos \theta)^3 + (2 \cos \theta)^2 - 2(2 \cos \theta) - 1 \\
 &= \left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)^3 + \left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)^2 - 2\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right) - 1 \\
 &= \frac{1}{\alpha^3} (\alpha^6 + \alpha^5 + \alpha^4 + \alpha^3 + \alpha^2 + \alpha + 1) \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

となる。

(証明終)

(3)

ド・モアブルの定理を用いて,

$$\begin{aligned}
 \alpha^2 + \frac{1}{\alpha^2} &= \alpha^2 + \alpha^{-2} \\
 &= (\cos 2\theta + i \sin 2\theta) + \{\cos(-2\theta) + i \sin(-2\theta)\} \\
 &= 2 \cos 2\theta
 \end{aligned}$$

となるから, これと(1)の結果を用いて,

$$\begin{aligned}
 f(\cos 2\theta) &= 8 \cos^3 2\theta + 4 \cos^2 2\theta - 4 \cos 2\theta - 1 \\
 &= (2 \cos 2\theta)^3 + (2 \cos 2\theta)^2 - 2(2 \cos 2\theta) - 1 \\
 &= \left(\alpha^2 + \frac{1}{\alpha^2}\right)^3 + \left(\alpha^2 + \frac{1}{\alpha^2}\right)^2 - 2\left(\alpha^2 + \frac{1}{\alpha^2}\right) - 1 \\
 &= \frac{1}{\alpha^6} (\alpha^{12} + \alpha^{10} + \alpha^8 + \alpha^6 + \alpha^4 + \alpha^2 + 1) \\
 &= \frac{1}{\alpha^6} (\alpha^7 \cdot \alpha^5 + \alpha^7 \cdot \alpha^3 + \alpha^7 \cdot \alpha + \alpha^6 + \alpha^4 + \alpha^2 + \alpha + 1) \\
 &= \frac{1}{\alpha^6} (\alpha^6 + \alpha^5 + \alpha^4 + \alpha^3 + \alpha^2 + \alpha + 1) (\because \alpha^7 = 1) \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

となる。

(証明終)