

(1)

$t=0, 9, 10$ のとき、当たりくじをちょうど1回引くことはないので確率は0となる。

$t \neq 0, 9, 10$ のとき、くじ3本の選び方は、

$${}_{10}C_3 = 120 \text{ (通り)}$$

であり、これらは同様に確からしく起こる。当たりくじ1本の選び方は、

$${}_tC_1 = t \text{ (通り)}$$

であり、はずれくじ2本の選び方は、

$${}_{10-t}C_2 = \frac{(10-t)(9-t)}{2} \text{ (通り)}$$

である。よってあたりくじをちょうど1回引く確率は、

$$\frac{t \cdot \frac{(10-t)(9-t)}{2}}{120} = \frac{t(10-t)(9-t)}{240}$$

である。これは $t=0, 9, 10$ のときも成り立つ。

$$\text{(答)} \quad \frac{t(10-t)(9-t)}{240}$$

(2)

まず、当たりくじが0本である確率について考える。 $t=8, 9, 10$ のときは、当たりくじを引く数が0回になることはないので確率は0となる。

$t \neq 8, 9, 10$ のとき、すべてはずれくじを引く確率は、

$$\frac{10-t}{10} \cdot \frac{9-t}{9} \cdot \frac{8-t}{8} = \frac{(10-t)(9-t)(8-t)}{720}$$

となる。これは $t=8, 9, 10$ のときも成り立つ。よって当たりくじが1本以下になる確率は、

$$\begin{aligned} P(t) &= \frac{t(10-t)(9-t)}{240} + \frac{(10-t)(9-t)(8-t)}{720} \\ &= \frac{(10-t)(9-t)(t+4)}{360} \end{aligned}$$

となる。 $P(t) \leq \frac{1}{2}$ となるとき、

$$P(t) \leq \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(10-t)(9-t)(t+4)}{360} \leq \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow (t-5)(t^2-10t-36) \leq 0$$

$$\therefore t \leq 5 - \sqrt{61}, \quad 5 \leq t \leq 5 + \sqrt{61}$$

となる。 t は0以上10以下の整数なので、

$$t = 5, 6, 7, 8, 9, 10$$

である。

$$\text{(答)} \quad t = 5, 6, 7, 8, 9, 10$$

(1)

回転体の体積の公式を用いて、

$$\begin{aligned}
 V &= \pi \int_0^{\pi} y^2 dx \\
 &= \pi \int_0^{\pi} \left(a \sin x + \frac{a}{a-1} \cos x \right)^2 dx \\
 &= a^2 \pi \int_0^{\pi} \sin^2 x dx + \frac{2a^2}{a-1} \pi \int_0^{\pi} \sin x \cos x dx + \frac{a^2}{(a-1)^2} \pi \int_0^{\pi} \cos^2 x dx
 \end{aligned}$$

となるが、ここで各項の定積分の値を求めると、

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\pi} \sin^2 x dx &= \int_0^{\pi} \frac{1 - \cos 2x}{2} dx \\
 &= \left[\frac{1}{2} x - \frac{1}{4} \sin 2x \right]_0^{\pi} \\
 &= \frac{1}{2} \pi
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\pi} \sin x \cos x dx &= \int_0^{\pi} \frac{1}{2} \sin 2x dx \\
 &= \left[-\frac{1}{4} \cos 2x \right]_0^{\pi} \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\pi} \cos^2 x dx &= \int_0^{\pi} \frac{1 + \cos 2x}{2} dx \\
 &= \left[\frac{1}{2} x + \frac{1}{4} \sin 2x \right]_0^{\pi} \\
 &= \frac{1}{2} \pi
 \end{aligned}$$

となるから、この値を代入して、

$$\begin{aligned}
 V &= a^2 \pi \cdot \frac{1}{2} \pi + \frac{2a^2}{a-1} \pi \cdot 0 + \frac{a^2}{(a-1)^2} \pi \cdot \frac{1}{2} \pi \\
 &= \frac{1}{2} \pi^2 \left(a^2 + \frac{a^2}{(a-1)^2} \right)
 \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{1}{2} \pi^2 \left(a^2 + \frac{a^2}{(a-1)^2} \right)$$

(2)

$f(a) = a^2 + \frac{a^2}{(a-1)^2}$ とおく。このとき $f'(a)$ は、

$$\begin{aligned}
 f'(a) &= 2a + \frac{2a(a-1)^2 - a^2 \cdot 2(a-1)}{(a-1)^4} \\
 &= \frac{2a(a-2)(a^2 - a + 1)}{(a-1)^3} \\
 &= \frac{2a(a-2) \left\{ \left(a - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{3}{4} \right\}}{(a-1)^3}
 \end{aligned}$$

となる。よって増減表は以下の通り。

a	(1)	...	2	...
$f'(a)$		-	0	+
$f(a)$		$\searrow$	8	$\nearrow$

したがって、 $f(a)$ は $a=2$ のとき最小値 8 をとる。このとき V も最小値をとり、その値は

$$\frac{1}{2} \pi^2 f(2) = 4\pi^2 \text{ となる。}$$

(答) $a=2$ のとき最小値 $4\pi^2$

(1)

ド・モアブルの定理を用いて、

$$\begin{aligned}\alpha^7 &= (\cos \theta + i \sin \theta)^7 \\ &= \cos 7\theta + i \sin 7\theta \\ &= \cos 2\pi + i \sin 2\pi \\ &= 1\end{aligned}$$

となる。また $\alpha \neq 1$ より、等比数列の和の公式を利用すると、

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^6 \alpha^k &= \alpha^6 + \alpha^5 + \alpha^4 + \alpha^3 + \alpha^2 + \alpha + 1 \\ &= \frac{\alpha^7 - 1}{\alpha - 1} \\ &= 0\end{aligned}$$

となる。

(証明終)

(2)

ド・モアブルの定理を用いて、

$$\begin{aligned}\alpha + \frac{1}{\alpha} &= \alpha + \alpha^{-1} \\ &= (\cos \theta + i \sin \theta) + \{\cos(-\theta) + i \sin(-\theta)\} \\ &= 2 \cos \theta\end{aligned}$$

となる。これと(1)の結果を用いて、

$$\begin{aligned}f(\cos \theta) &= 8 \cos^3 \theta + 4 \cos^2 \theta - 4 \cos \theta - 1 \\ &= (2 \cos \theta)^3 + (2 \cos \theta)^2 - 2(2 \cos \theta) - 1 \\ &= \left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)^3 + \left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)^2 - 2\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right) - 1 \\ &= \frac{1}{\alpha^3}(\alpha^6 + \alpha^5 + \alpha^4 + \alpha^3 + \alpha^2 + \alpha + 1) \\ &= 0\end{aligned}$$

となる。

(証明終)

(3)

ド・モアブルの定理を用いて、

$$\begin{aligned}\alpha^2 + \frac{1}{\alpha^2} &= \alpha^2 + \alpha^{-2} \\ &= (\cos 2\theta + i \sin 2\theta) + \{\cos(-2\theta) + i \sin(-2\theta)\} \\ &= 2 \cos 2\theta\end{aligned}$$

となるから、これと(1)の結果を用いて、

$$\begin{aligned}f(\cos 2\theta) &= 8 \cos^3 2\theta + 4 \cos^2 2\theta - 4 \cos 2\theta - 1 \\ &= (2 \cos 2\theta)^3 + (2 \cos 2\theta)^2 - 2(2 \cos 2\theta) - 1 \\ &= \left(\alpha^2 + \frac{1}{\alpha^2}\right)^3 + \left(\alpha^2 + \frac{1}{\alpha^2}\right)^2 - 2\left(\alpha^2 + \frac{1}{\alpha^2}\right) - 1 \\ &= \frac{1}{\alpha^6}(\alpha^{12} + \alpha^{10} + \alpha^8 + \alpha^6 + \alpha^4 + \alpha^2 + 1) \\ &= \frac{1}{\alpha^6}(\alpha^7 \cdot \alpha^5 + \alpha^7 \cdot \alpha^3 + \alpha^7 \cdot \alpha + \alpha^6 + \alpha^4 + \alpha^2 + \alpha + 1) \\ &= \frac{1}{\alpha^6}(\alpha^6 + \alpha^5 + \alpha^4 + \alpha^3 + \alpha^2 + \alpha + 1) (\because \alpha^7 = 1) \\ &= 0\end{aligned}$$

となる。よって $\cos 2\theta$ は $f(x) = 0$ の解である。同様にして、ド・モアブルの定理を用いて、

$$\begin{aligned}\alpha^3 + \frac{1}{\alpha^3} &= \alpha^3 + \alpha^{-3} \\ &= (\cos 3\theta + i \sin 3\theta) + \{\cos(-3\theta) + i \sin(-3\theta)\} \\ &= 2 \cos 3\theta\end{aligned}$$

となるから、これと(1)の結果を用いて、

$$\begin{aligned}f(\cos 3\theta) &= 8 \cos^3 3\theta + 4 \cos^2 3\theta - 4 \cos 3\theta - 1 \\ &= (2 \cos 3\theta)^3 + (2 \cos 3\theta)^2 - 2(2 \cos 3\theta) - 1 \\ &= \left(\alpha^3 + \frac{1}{\alpha^3}\right)^3 + \left(\alpha^3 + \frac{1}{\alpha^3}\right)^2 - 2\left(\alpha^3 + \frac{1}{\alpha^3}\right) - 1 \\ &= \frac{1}{\alpha^9}(\alpha^{18} + \alpha^{15} + \alpha^{12} + \alpha^9 + \alpha^6 + \alpha^3 + 1) \\ &= \frac{1}{\alpha^9}(\alpha^{14} \cdot \alpha^4 + \alpha^{14} \cdot \alpha + \alpha^7 \cdot \alpha^5 + \alpha^7 \cdot \alpha^2 + \alpha^6 + \alpha^3 + 1) \\ &= \frac{1}{\alpha^9}(\alpha^6 + \alpha^5 + \alpha^4 + \alpha^3 + \alpha^2 + \alpha + 1) (\because \alpha^7 = 1) \\ &= 0\end{aligned}$$

となる。よって $\cos 3\theta$ も $f(x) = 0$ の解である。

(証明終)

(1)

背理法を利用して、 x, y がともに 3 の倍数であることを示す。すなわち、 x, y の少なくとも一方は 3 の倍数でないと仮定して矛盾を導く。以下合同式の法を 3 とする。自然数 N に対し、 $N \equiv 0$ のとき $N^2 \equiv 0$ であり、 $N \equiv 1$ のとき $N^2 \equiv 1$ であり、 $N \equiv 2$ のとき $N^2 \equiv 2^2 \equiv 1$ である。ここで、 x, y の少なくとも一方は 3 の倍数でないから、

$$(x^2, y^2) \equiv (0, 1), (1, 0), (1, 1)$$

となるが、このとき、 $x^2 + y^2 \equiv 1$ または $x^2 + y^2 \equiv 2$ となり、これは $x^2 + y^2$ が 3 の倍数となることに矛盾する。したがって仮定が誤りであるから、 $x^2 + y^2$ が 3 の倍数のとき、 x, y はともに 3 の倍数である。

(証明終)

(2)

0 以上の整数 n について、

$$x^2 + y^2 = 5 \cdot 3^{2n} \text{ をみたす自然数の組 } (x, y) \text{ は } (3^n, 2 \cdot 3^n), (2 \cdot 3^n, 3^n) \text{ のみであること}$$

・・・①

を数学的帰納法を用いて証明する。

[1] $n=0$ のとき

$x^2 + y^2 = 5$ をみたす (x, y) は $(1, 2), (2, 1)$ のみである。よって①は成立する。

[2] $n=k$ ($k \geq 0$) のとき

①が成立すると仮定すると、 $x^2 + y^2 = 5 \cdot 3^{2k}$ を満たす (x, y) は $(3^k, 2 \cdot 3^k), (2 \cdot 3^k, 3^k)$ のみ

である。ここで、 $x^2 + y^2 = 5 \cdot 3^{2(k+1)}$ を満たす (x, y) について考えると、 $5 \cdot 3^{2(k+1)}$ は 3 の倍数であるから、(1)より x, y は 3 の倍数なので自然数 x', y' を用いて、

$$x = 3x', y = 3y'$$

と表せる。これを $x^2 + y^2 = 5 \cdot 3^{2(k+1)}$ に代入すると、

$$(3x')^2 + (3y')^2 = 5 \cdot 3^{2(k+1)}$$

$$\Leftrightarrow (x')^2 + (y')^2 = 5 \cdot 3^{2k}$$

となる。よって、仮定より

$$(x', y') = (3^k, 2 \cdot 3^k), (2 \cdot 3^k, 3^k)$$

となる。このとき、

$$(x, y) = (3^{k+1}, 2 \cdot 3^{k+1}), (2 \cdot 3^{k+1}, 3^{k+1})$$

となるので①は $n=k+1$ でも成り立つ。

以上[1], [2]より①が 0 以上の整数 n について常に成り立つことが示された。

(証明終)

(3)

[1] $m=2l$ (l は 0 以上の整数) のとき

このとき $x^2 + y^2 = 7 \cdot 3^m$ は $x^2 + y^2 = 7 \cdot 3^{2l}$ と表せる。まず、 $l=0$ のとき、 $x^2 + y^2 = 7$ をみたす (x, y) は存在しない。次に、 $l \geq 1$ の場合を考える。(1)より x, y は 3 の倍数なので自然数 x_1, y_1 を用いて、

$$x = 3x_1, y = 3y_1$$

と表せる。これを $x^2 + y^2 = 7 \cdot 3^{2l}$ に代入すると、

$$(3x_1)^2 + (3y_1)^2 = 7 \cdot 3^{2l}$$

$$\Leftrightarrow (x_1)^2 + (y_1)^2 = 7 \cdot 3^{2(l-1)}$$

となる。ここでさらに(1)より x_1, y_1 は 3 の倍数なので自然数 x_2, y_2 を用いて、

$$x_1 = 3x_2, y_1 = 3y_2$$

と表し $(x_1)^2 + (y_1)^2 = 7 \cdot 3^{2(l-1)}$ に代入すると

$$(x_2)^2 + (y_2)^2 = 7 \cdot 3^{2(l-2)}$$

が得られる。これを繰り返すことにより帰納的に、

$$(x_l)^2 + (y_l)^2 = 7$$

が得られる。しかしこれを満たす自然数 x_l, y_l は存在しないため $x^2 + y^2 = 7 \cdot 3^{2l}$ を満たす x, y も存在しない。

[2] $m=2l+1$ のとき

このとき $x^2 + y^2 = 7 \cdot 3^m$ は $x^2 + y^2 = 21 \cdot 3^{2l}$ と表せる。[1]と同様に帰納的に

$$(x_l)^2 + (y_l)^2 = 21$$

が得られる。しかしこれを満たす x_l, y_l は存在しないため $x^2 + y^2 = 7 \cdot 3^{2l}$ を満たす x, y も存在しない。

以上[1], [2]より $x^2 + y^2 = 7 \cdot 3^m$ を満たす自然数 x, y は存在しない。

(証明終)