

【解答】

問 1	1	2				
	1	6				
問 2	3	4	5	6		
	2	5	1	7		
問 3	7	8	9	10	11	12
	7	1	4	7	2	7

【解説】

問 1

問題の不等式を変形すると

$$1 \leq \log_e n \leq 12$$

$$\Leftrightarrow e \leq n \leq e^{12}$$

となる。また、 $\log_{10} e^{12} = 12 \log_{10} e$ より、

$$0.4342 < \log_{10} e < 0.4343$$

$$\Leftrightarrow 12 \cdot 0.4342 < \log_{10} e^{12} < 12 \cdot 0.4343$$

$$\Leftrightarrow 5.2104 < e^{12} < 5.2116$$

$$\therefore 10^{5.2104} < e^{12} < 10^{5.2116}$$

となる。よって、 e^{12} の整数部分は 6 桁である。したがって、 $e \leq n \leq e^{12}$ を満たす 6 桁の自然

数 n が存在する。また、

$$0.4342 < \log_{10} e < 0.4343$$

$$\Leftrightarrow 10^{0.4342} < e < 10^{0.4343}$$

より

$$1 < e < 10^{\frac{1}{2}} < 4$$

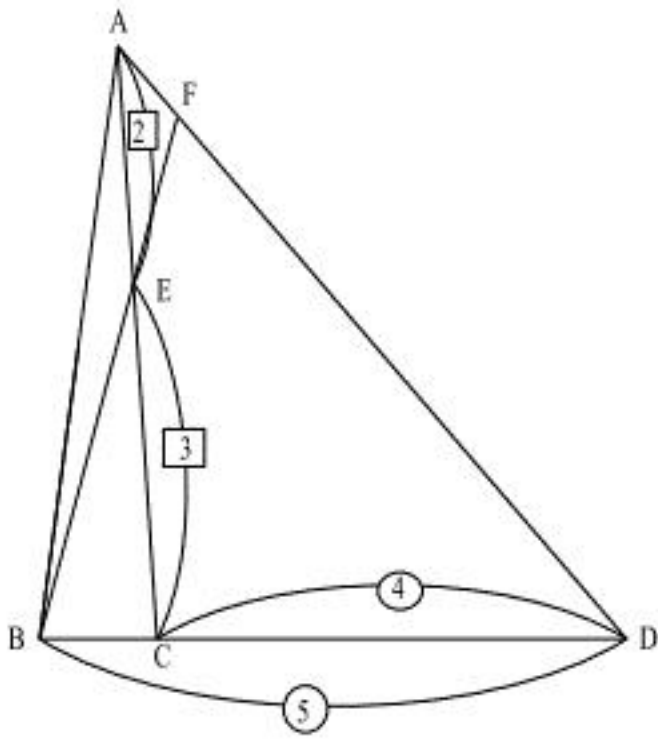
であるから、 $e \leq n \leq e^{12}$ を満たす 1 桁の自然数 n が存在する。以上より、問題の不等式を満た

す自然数 n の桁数 p は

$$1 \leq p \leq 6$$

である。

問 2



四角形 ABCF, $\triangle ABC$, $\triangle ACF$ の面積をそれぞれ S, S_1, S_2 とおくと、

$$S = S_1 + S_2$$

が成り立つ。また、上図より

$$S_2 = \frac{AF}{AD} \cdot \triangle ACD = \frac{AF}{AD} \cdot \frac{CD}{BC} \cdot \triangle ABC$$

が成り立つ。上図より、

$$\frac{CD}{BC} = 4$$

である。また、 $\triangle ACD$ と直線 BF にメネラウスの定理を適用して

$$\frac{AF}{FD} \cdot \frac{DB}{BC} \cdot \frac{CE}{EA} = 1$$

を得る。よって、

$$\frac{AF}{FD} = \frac{BC}{DB} \cdot \frac{EA}{CE} = \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{15}$$

であるから、

$$\frac{AF}{AD} = \frac{AF}{AF+FD} = \frac{2}{2+15} = \frac{2}{17}$$

である。以上より、

$$S = S_1 + S_2 = S_1 + \frac{AF}{AD} \cdot \frac{CD}{BC} S_1 = \left(1 + \frac{8}{17}\right) S_1 = \frac{25}{17} S_1$$

である。

問 3

$f(x) = x^3 - x^2 - 2x + 1$ より、

$$f'(x) = 3x^2 - 2x - 2$$

である。よって、

$$f'(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{7}}{3}$$

である。よって、増減表は下表のようになる。

x	...	$\frac{1-\sqrt{7}}{3}$	...	$\frac{1+\sqrt{7}}{3}$	...	$\frac{1+3\sqrt{3}}{3}$
$f'(x)$	+	0	-	0	+	
$f(x)$	$\nearrow$	極大	$\searrow$	極小	$\nearrow$	

よって、 $f(x)$ の区間 $x \leq \frac{1+3\sqrt{3}}{3}$ における最大値は $f\left(\frac{1-\sqrt{7}}{3}\right)$ か $f\left(\frac{1+3\sqrt{3}}{3}\right)$ のどちらかであ

る。ここで、 $f\left(\frac{1-\sqrt{7}}{3}\right) = k$ とおく。 $f(x)$ が $x = \frac{1-\sqrt{7}}{3}$ で極大値をとることから、直線 $y = k$ は

曲線 $y = f(x)$ と点 $\left(\frac{1-\sqrt{7}}{3}, k\right)$ で接する。よって、2 つの方程式を連立した

$$x^3 - x^2 - 2x + 1 = k$$

$$\Leftrightarrow x^3 - x^2 - 2x + 1 - k = 0$$

は、 $x = \frac{1-\sqrt{7}}{3}$ を重解にもつ。もう一つの解を $x = p$ とおくと、解と係数の関係より

$$p + \frac{1-\sqrt{7}}{3} + \frac{1-\sqrt{7}}{3} = 1$$

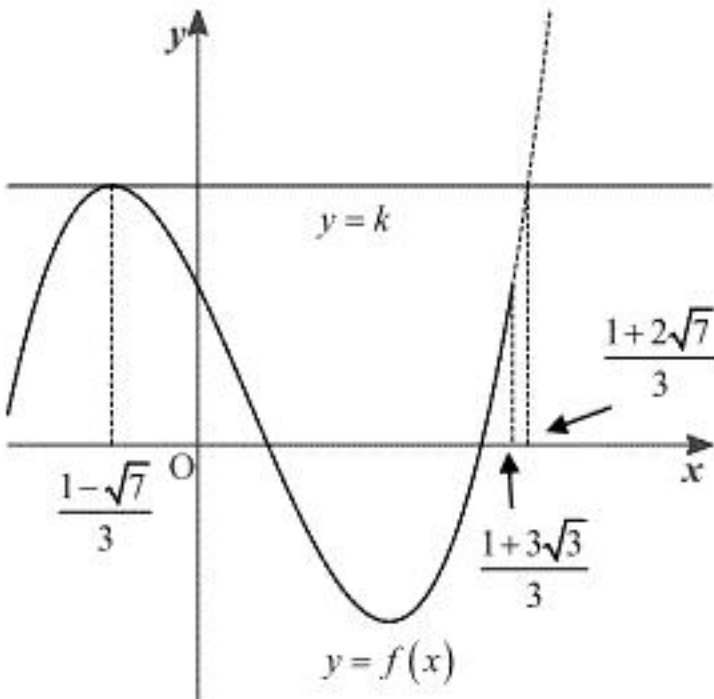
$$\therefore p = \frac{1+2\sqrt{7}}{3}$$

となる。また、

$$\frac{1+2\sqrt{7}}{3} - \frac{1+3\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{28} - \sqrt{27}}{3} > 0$$

$$\therefore \frac{1+3\sqrt{3}}{3} < \frac{1+2\sqrt{7}}{3}$$

であるから、グラフは次のようになる。



よって、最大値は $f\left(\frac{1-\sqrt{7}}{3}\right) = k$ である。再び解と係数の関係より

$$-(1-k) = p \cdot \frac{1-\sqrt{7}}{3} \cdot \frac{1-\sqrt{7}}{3}$$

$$\therefore k = \frac{7+14\sqrt{7}}{27}$$

を得る。

〔解答〕

問 1	13	14	15	16	17	18	19	20	21
	4	4	1	1	1	2	1	2	1
問 2	22	23	24	25	26	27	28	29	30
	1	3	2	3	4	3	5	3	0
問 3	31	32	33	34					
	3	7	4	8					

〔解説〕

問 1

 $\cos \theta = x$ とおくと、

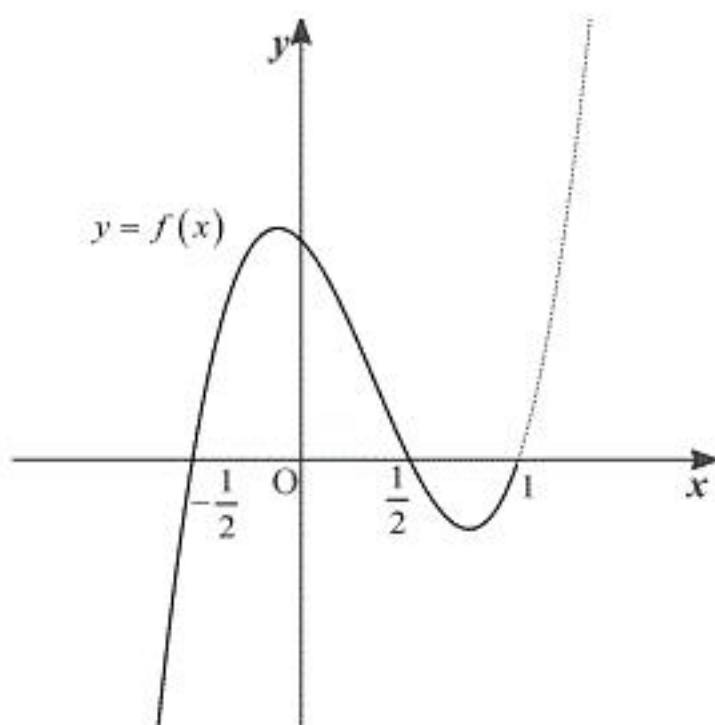
$$\begin{aligned}
 4\sin^2 \theta + 2\cos 2\theta \cos \theta + \cos \theta - 3 &= 4(1 - \cos^2 \theta) + 2(2\cos^2 \theta - 1)\cos \theta + \cos \theta - 3 \\
 &= 4(1 - x^2) + 2(2x^2 - 1)x + x - 3 \\
 &= 4x^3 - 4x^2 - x + 1
 \end{aligned}$$

となる。よって、 $f(x) = 4x^3 - 4x^2 - x + 1$ である。また、因数分解すると

$$\begin{aligned}
 f(x) &= 4x^3 - 4x^2 - x + 1 \\
 &= 4x^2(x-1) - (x-1) \\
 &= (x-1)(4x^2-1) \\
 &= (x-1)(2x+1)(2x-1)
 \end{aligned}$$

となる。

問 2

問 1 の結果より、 $y = f(x)$ のグラフの概形は次のようになる。また、不等式(1)が成り立つための必要十分条件は、 $|x| \leq 1$ の範囲で $f(x) \geq 0$ が成り立つことである。よって、上図より $|x| \leq 1$ の範囲での $f(x) \geq 0$ の解は

$$-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}, x = 1$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq \cos \theta \leq \frac{1}{2}, \cos \theta = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3}\pi \leq \theta \leq \frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi \leq \theta \leq \frac{5}{3}\pi, \theta = 0 \quad (\because 0 \leq \theta < 2\pi)$$

となる。

問 3

問 2 の図より、求める面積は

$$\begin{aligned}
 S &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x) dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 \{-f(x)\} dx \\
 &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (4x^3 - 4x^2 - x + 1) dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 (-4x^3 + 4x^2 + x - 1) dx \\
 &= 2 \int_0^{\frac{1}{2}} (-4x^2 + 1) dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 (-4x^3 + 4x^2 + x - 1) dx \\
 &= 2 \left[-\frac{4}{3}x^3 + x \right]_0^{\frac{1}{2}} + \left[-x^4 + \frac{4}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - x \right]_{\frac{1}{2}}^1 \\
 &= 2 \cdot \left(-\frac{4}{3} \cdot \frac{1}{8} + \frac{1}{2} \right) - \left(1 - \frac{1}{16} \right) + \frac{4}{3} \cdot \left(1 - \frac{1}{8} \right) + \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{4} \right) - \left(1 - \frac{1}{2} \right) \\
 &= -\frac{1}{3} + 1 - \frac{15}{16} + \frac{7}{6} + \frac{3}{8} - \frac{1}{2} \\
 &= \frac{37}{48}
 \end{aligned}$$

である。

【解答】

問 1	35	36	37	38	39
	3	2	－	3	2
問 2	40	41	42	43	
	1	1	2	2	
問 3	44	45	46		
	1	1	2		

【解説】

問 1

$z = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i (\neq 1)$ のとき、

$$\begin{aligned} (1-z)S_n &= (1-z)(1+z+z^2+\cdots+z^{n-1}) = (1-z^n) \\ \therefore S_n &= \frac{1-z^n}{1-z} \quad (\because z \neq 1) \end{aligned}$$

が成り立つ。 $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = \cos \frac{5}{3}\pi + i \sin \frac{5}{3}\pi$ より、 $z = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ のとき、ド・モアブルの定理を用いて

$$\begin{aligned} z^8 &= \left(\cos \frac{5}{3}\pi + i \sin \frac{5}{3}\pi \right)^8 \\ &= \cos \frac{40}{3}\pi + i \sin \frac{40}{3}\pi \\ &= \cos \frac{4}{3}\pi + i \sin \frac{4}{3}\pi \\ &= -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \end{aligned}$$

が成り立つ。よって、 $z = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ のとき、

$$\begin{aligned} S_8 &= \frac{1-z^8}{1-z} \\ &= \frac{\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i}{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i} \\ &= \sqrt{3} \cdot \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i}{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i} \\ &= \sqrt{3} \cdot \frac{\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}}{\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}} \\ &= \sqrt{3} \cdot \left\{ \cos \left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3} \right) \right\} \\ &= \sqrt{3} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \right) \\ &= \frac{3}{2} + \frac{-\sqrt{3}}{2}i \end{aligned}$$

となる。

問 2

$z = \cos \theta + i \sin \theta (0 < \theta < 2\pi)$ のとき $z \neq 1$ であるから、

$$1+z+z^2+\cdots+z^{n-1} = \frac{1-z^n}{1-z}$$

という式が成り立つ。両辺に $z = \cos \theta + i \sin \theta$ を代入してみると、左辺はド・モアブルの定理より

$$\sum_{k=0}^{n-1} z^k = \sum_{k=0}^{n-1} \{ \cos k\theta + i \sin k\theta \} = \sum_{k=0}^{n-1} \cos k\theta + i \sum_{k=0}^{n-1} \sin k\theta$$

となる。また、右辺はド・モアブルの定理より

$$\begin{aligned} \frac{1-z^n}{1-z} &= \frac{(1-\cos n\theta) - i \sin n\theta}{(1-\cos \theta) - i \sin \theta} \\ &= \frac{\{(1-\cos n\theta) - i \sin n\theta\} \{(1-\cos \theta) + i \sin \theta\}}{(1-\cos \theta)^2 + \sin^2 \theta} \quad (\because 1-\cos \theta + i \sin \theta \neq 0) \\ &= \frac{\{(1-\cos n\theta)(1-\cos \theta) + \sin \theta \sin n\theta\} + i \{(1-\cos n\theta) \sin \theta - (1-\cos \theta) \sin n\theta\}}{2-2\cos \theta} \end{aligned}$$

となり、特に虚部は、三角関数の加法定理を用いて変形すると

$$\frac{-\sin n\theta + (\sin n\theta \cos \theta - \cos n\theta \sin \theta) + \sin \theta}{2-2\cos \theta} = \frac{-\sin n\theta + \sin(n-1)\theta + \sin \theta}{2-2\cos \theta}$$

となる。よって、両辺の虚部が等しいことから

$$\sum_{k=0}^{n-1} \sin k\theta = \frac{-\sin n\theta + \sin(n-1)\theta + \sin \theta}{2-2\cos \theta}$$

を得る。

問 3

問 2 の結果において $\theta = \frac{\pi}{n}$ とおくと、

$$\sum_{k=0}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{n} = \frac{-\sin \pi + \sin \frac{n-1}{n}\pi + \sin \frac{\pi}{n}}{2-2\cos \frac{\pi}{n}}$$

となる。 $\frac{\pi}{n} = \pi - \frac{n-1}{n}\pi$ ということに注意して右辺を変形していくと

$$\begin{aligned} \frac{0 + \sin \frac{\pi}{n} + \sin \frac{\pi}{n}}{2-2\cos \frac{\pi}{n}} &= \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{1-\cos \frac{\pi}{n}} \\ &= \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{1-\cos \frac{\pi}{n}} \cdot \frac{1+\cos \frac{\pi}{n}}{1+\cos \frac{\pi}{n}} \quad \left(\because 1+\cos \frac{\pi}{n} \neq 0 \right) \\ &= \frac{\sin \frac{\pi}{n} \cdot \left(1+\cos \frac{\pi}{n} \right)}{\sin^2 \frac{\pi}{n}} \\ &= \frac{1+\cos \frac{\pi}{n}}{\sin \frac{\pi}{n}} \end{aligned}$$

となる。よって、

$$\sum_{k=0}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{n} = \frac{1+\cos \frac{\pi}{n}}{\sin \frac{\pi}{n}}$$

である。よって、

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{n} = \frac{1+\cos \frac{\pi}{n}}{\pi \cdot \frac{\pi}{n}}$$

と表すことができる。ここで、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}} = 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \cos \frac{\pi}{n} = 1$$

であるから、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \sin k\theta = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+\cos \frac{\pi}{n}}{\pi \cdot \frac{\pi}{n}} = \frac{2}{\pi}$$

となる。

〔解答〕

問 1	47	48	49
	1	4	2
問 2	50	51	52
	5	4	2
問 3	53	54	55
	4	2	1

〔解説〕

問 1

全体の並べ方の総数は

$${}_{10}C_5 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = 252$$

であり、これらの場合は同様に確からしい。また、黒石が5個連続して並び並べ方の総数は、黒石が5個並んだかたまりを1つのものとみると、かたまり1個と白石5個の並べ方の総数に等しいから

$${}_6C_1 = 6 \text{ (通り)}$$

である。よって、求める確率は

$$\frac{6}{252} = \frac{1}{42}$$

である。

問 2

問 1 と同様に黒石が4個並んだかたまりを1つのものとみると、黒石が4個連続で並び、5個連続では並ばない並べ方は、黒石のかたまり1個と黒石1個と白石5個の並べ方の総数から黒石のかたまり1個と黒石1個が隣り合うような並べ方の総数を引いたものである。ここで、黒石が4個連続したかたまりをB、黒石1個をbと表すことにする。黒石のかたまり1個と黒石1個と白石5個の並べ方の総数は

$$7 \cdot 6 = 42 \text{ (通り)}$$

である。また、黒石のかたまり1個と黒石1個が隣り合うような並べ方の総数は、白石5個の間または端の6箇所にBbまたはbBと並べることを考えて

$$6 \cdot 2 = 12 \text{ (通り)}$$

である。よって、黒石が4個連続で並び、5個連続では並ばない並べ方は

$$42 - 12 = 30 \text{ (通り)}$$

であり、求める確率は

$$\frac{30}{252} = \frac{5}{42}$$

である。

問 3

問 2 より黒石が4個連続で並び、5個連続では並ばないような並べ方は30通りであり、このうち白石が5個連続で並び並べ方は、b, Bが両端に並び2通りである。よって、黒石が4個連続で並び、黒石、白石ともに5個連続では並ばないような並べ方は

$$30 - 2 = 28 \text{ (通り)}$$

である。また、黒石と白石の条件の対称性より、白石が4個連続で並び、黒石、白石ともに5個連続では並ばないような並べ方も28通りである。さらに、白石が4個連続したかたまりをW、白石1個をwと表すことにすると、黒石、白石がともに4個連続で並び、5個連続では並ばないような並べ方は

$$(bwBW), (BWbw), (wbWB), (WBwb), (bWBw), (BwbW), (WbwB), (wBWb)$$

と並び8通りである。以上より、黒石と白石のいずれか一方または両方が4個連続して並び、ともに5個連続では並ばない並べ方の総数は

$$28 + 28 - 8 = 48 \text{ (通り)}$$

である。よって、求める確率は

$$\frac{48}{252} = \frac{4}{21}$$

である。