I

〔解答〕

問 1	$\boxed{1}$	$\boxed{2}$	$\boxed{3}$	$\boxed{4}$
	9	6	5	4
問 2	$\boxed{5}$	$\boxed{6}$	$\boxed{7}$	
	8	1	0	
問 3	$\boxed{8}$	$\boxed{9}$	$\boxed{10}$	$\boxed{11}$
	3	3	4	2

〔解説〕

問 1

$\log_a b = t$ とおくと，$1 < b \leqq a$ より，$0 < t \leqq 1$ である。したがって，

$$\log_a b + \log_b a = \frac{9}{2}$$
$$\Leftrightarrow t + \frac{1}{t} = \frac{9}{2}$$
$$\Leftrightarrow 2t^2 - 9t + 2 = 0$$
$$\therefore t = \frac{9 \pm \sqrt{65}}{4}$$

より，$0 < t \leqq 1$ を満たすのは，$t = \dfrac{9 - \sqrt{65}}{4}$ である。

問 2

負でない整数 a, b, c, d, e を用いて

リンゴとミカンとナシをもらった人　・・・a 人
リンゴとミカンをもらった人　・・・b 人
リンゴとナシをもらった人　・・・c 人
ミカンとナシをもらった人　・・・d 人
何ももらっていない人　・・・e 人

とおくと，それぞれの果実の個数および全体の人数から，

$$\begin{cases} 13 + a + b + c = 25 \\ 9 + a + b + d = 19 \\ 6 + a + c + d = 16 \\ 13 + 9 + 6 + a + b + c + d + e = 50 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} a + b + c = 12 \\ a + b + d = 10 \\ a + c + d = 10 \\ a + b + c + d + e = 22 \end{cases}$$

が成り立つ。4 式より，

$$\begin{cases} b = c = 6 - \dfrac{a}{2} \\ d = 4 - \dfrac{a}{2} \\ e = 6 + \dfrac{a}{2} \end{cases}$$

である。$d \geqq 0$ であるから，

$$d = 4 - \frac{a}{2} \geqq 0$$
$$\Leftrightarrow 8 \geqq a$$

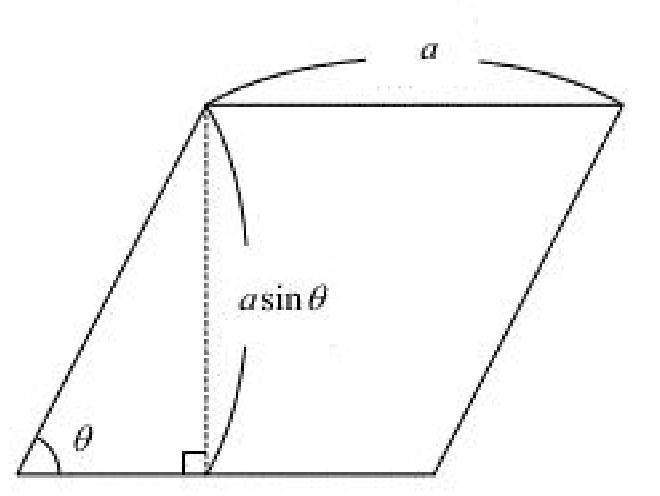
である。ここで，$a = 8$ とすれば，$b = c = 2, d = 0, e = 10$ と条件を満たしている。よって，a の最大値は 8 である。また，$e = 6 + \dfrac{a}{2}$ より，e は a が最大のときに最大値をとる。したがって，e の最大値は上記のときの 10 である。

問 3

4 辺のうち 3 辺の長さが等しいとき，少なくとも 1 組の対辺の長さは等しい。

[1] 長さが等しい対辺が平行のとき

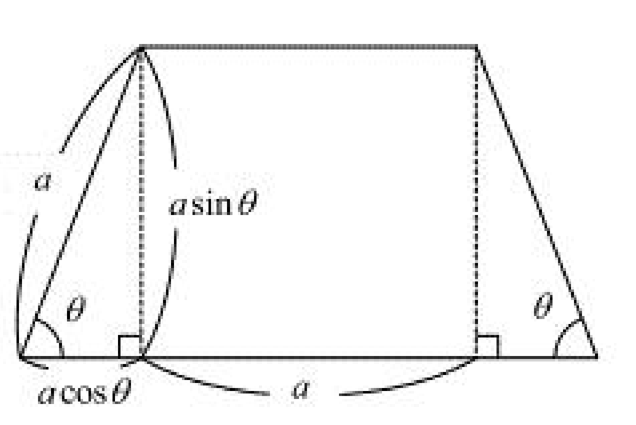
この台形は 1 辺の長さが a の平行四辺形となる。



上図のように $\theta\ (0 < \theta < \pi)$ とおくと，その面積は $a^2 \sin\theta$ である。よって，$\theta = \dfrac{\pi}{2}$ のときに面積は最大になり，その面積は a^2 である。

[2] 長さが等しい対辺が平行でないとき

この台形は，平行な 2 辺のうち，長い方と短い方の辺のどちらかの長さが a である。長い方の辺の長さが a のとき，台形は下図のような等脚台形になる。



上図のように，角度を $\theta\left(0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}\right)$ とおくと，求める面積 S は，

$$S = \frac{1}{2} \cdot a\sin\theta \cdot \{a + (a + 2a\cos\theta)\}$$
$$= a^2 \sin\theta (1 + \cos\theta)$$

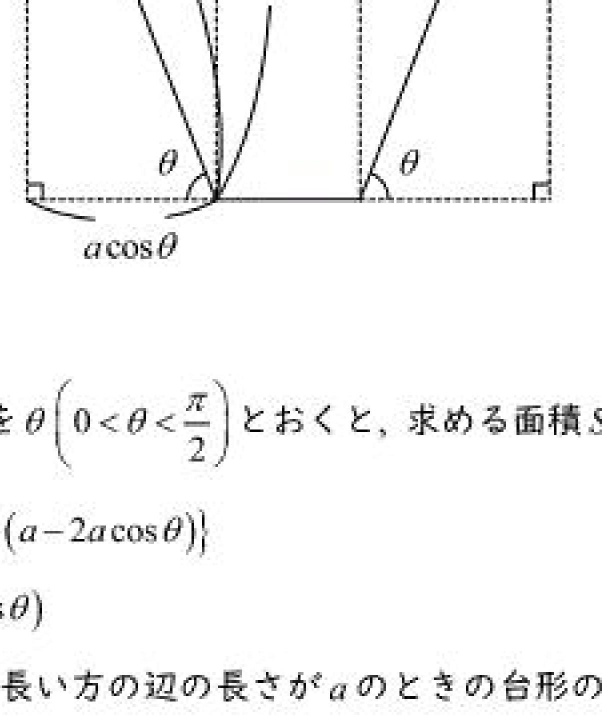
と表される。このとき，

$$\frac{dS}{d\theta} = a^2 \{\cos\theta(1 + \cos\theta) - \sin^2\theta\}$$
$$= a^2 (2\cos^2\theta + \cos\theta - 1)$$
$$= a^2 (\cos\theta + 1)(2\cos\theta - 1)$$

であるから，$\dfrac{dS}{d\theta} = 0$ とすると，$\cos\theta = -1, \dfrac{1}{2}$ であるから，$0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ において，$\theta = \dfrac{\pi}{3}$ のときである。よって，S の増減表は以下のようになる。

θ	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$\frac{dS}{d\theta}$		+	0	−	
S		↗	最大	↘	

よって，面積の最大値は，$\theta = \dfrac{\pi}{3}$ のとき，$\dfrac{3\sqrt{3}}{4}a^2$ である。また，長い方の辺の長さが a のとき，台形は下図のような等脚台形になる。



上図のように，角度を $\theta\left(0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}\right)$ とおくと，求める面積 S は，

$$S = \frac{1}{2} \cdot a\sin\theta \cdot \{a + (a - 2a\cos\theta)\}$$
$$= a^2 \sin\theta (1 - \cos\theta)$$

と表される。これを長い方の辺の長さが a のときの台形の，θ の値が同じときの面積と比較すると，$0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ のとき $\cos\theta > 0$ であるから，

$$a^2 \sin\theta (1 - \cos\theta) < a^2 \sin\theta (1 + \cos\theta)$$

と常に小さくなり不適切である。

[1], [2] より面積の最大値は $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}a^2$ である。

2

〔解答〕

問 1	$\boxed{12}$	$\boxed{13}$	$\boxed{14}$	$\boxed{15}$	
	2	2	1	2	
問 2	$\boxed{16}$	$\boxed{17}$			
	3	2			
問 3	$\boxed{18}$	$\boxed{19}$	$\boxed{20}$	$\boxed{21}$	$\boxed{22}$
	3	2	3	2	7

〔解説〕

問 1

t を実数として，曲線上の点 $\left(t,\ at^2-\dfrac{1}{a}\right)$ を考えると，原点との距離 $d(t)$ は，

$$\begin{aligned} d(t) &= \sqrt{t^2+\left(at^2-\frac{1}{a}\right)^2} \\ &= \sqrt{a^2t^4-t^2+\frac{1}{a^2}} \\ &= \sqrt{a^2\left(t^2-\frac{1}{2a^2}\right)^2+\frac{3}{4a^2}} \end{aligned}$$

であり，$t^2=\dfrac{1}{2a^2}$ の時に $d(t)$ は最小となる。よって，P の座標は，x 座標が正であることから，

$\mathrm{P}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2a},\ -\dfrac{1}{2a}\right)$ である。

問 2

問 1 より，

$$\begin{aligned} \mathrm{OP} &= \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2a}\right)^2+\left(-\frac{1}{2a}\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{2}{4a^2}+\frac{1}{4a^2}} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2a} \end{aligned}$$

であるから，

$$\begin{aligned} &\frac{\sqrt{3}}{2a}=1 \\ &\therefore a=\frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

である。

問 3

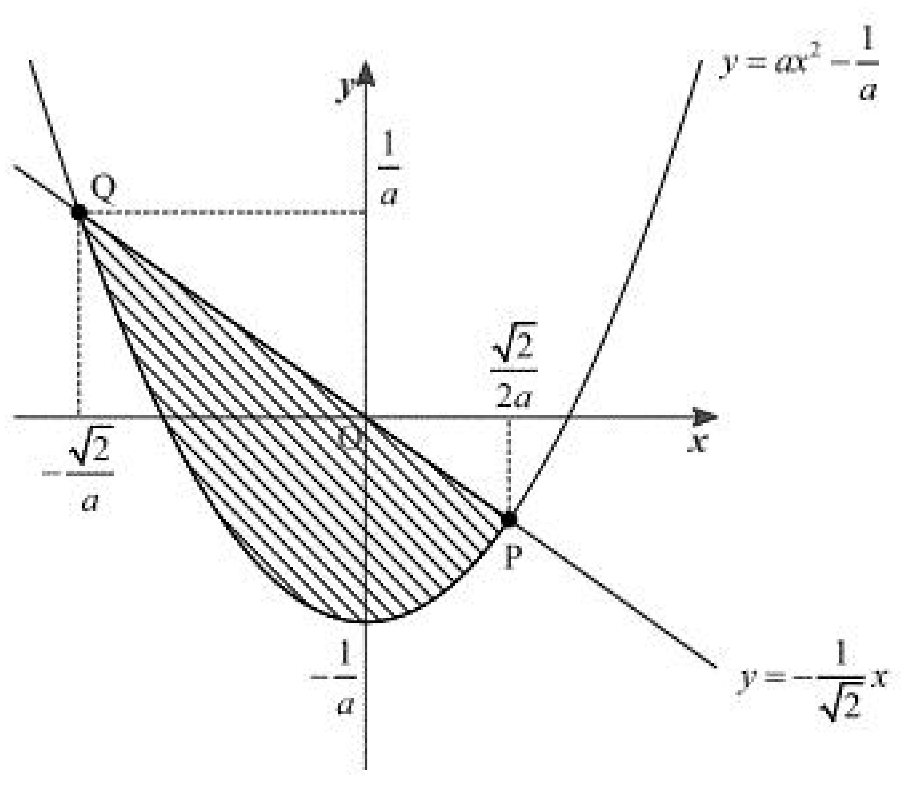
問 1 より，OP を通る直線の方程式は，

$$\begin{aligned} y &= \frac{-\frac{1}{2a}}{\frac{\sqrt{2}}{2a}}x \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2}}x \end{aligned}$$

であるから，曲線との交点の x 座標は，

$$\begin{aligned} &ax^2-\frac{1}{a}=-\frac{1}{\sqrt{2}}x \\ &\Leftrightarrow \sqrt{2}a^2x^2+ax-\sqrt{2}=0 \\ &\Leftrightarrow \left(\sqrt{2}ax-1\right)\left(ax+\sqrt{2}\right)=0 \\ &\therefore x=\frac{1}{\sqrt{2}a},\ -\frac{\sqrt{2}}{a} \end{aligned}$$

であり，P でない交点を Q とすれば，$\mathrm{Q}\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{a},\ \dfrac{1}{a}\right)$ と求まる。したがって，曲線と OP を通る直線で囲まれた部分は以下の図の斜線部となる。



斜線部を y 軸周りに 1 回転してできる図形は，$\dfrac{1}{a}\geqq y\geqq -\dfrac{1}{a}$ の範囲の曲線の回転体の内部から，O を頂点とする高さ $\dfrac{1}{a}$，半径 $\dfrac{\sqrt{2}}{a}$ の円錐を除いたものであるから，その体積 $V(a)$ は，

$y=ax^2-\dfrac{1}{a}$ より $x^2=\dfrac{1}{a}\left(y+\dfrac{1}{a}\right)$ であることに注意して，

$$\begin{aligned} V(a) &= \int_{-\frac{1}{a}}^{\frac{1}{a}}\pi x^2\,dy-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{a}\cdot\pi\left(\frac{\sqrt{2}}{a}\right)^2 \\ &= \frac{\pi}{a}\int_{-\frac{1}{a}}^{\frac{1}{a}}\left(y+\frac{1}{a}\right)dy-\frac{2\pi}{3a^3} \\ &= \frac{\pi}{a}\left[\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{a}y\right]_{y=-\frac{1}{a}}^{y=\frac{1}{a}}-\frac{2\pi}{3a^3} \\ &= \frac{\pi}{a}\left\{\frac{3}{2a^2}-\left(-\frac{1}{2a^2}\right)\right\}-\frac{2\pi}{3a^3} \\ &= \frac{4\pi}{3a^3} \end{aligned}$$

となる。よって，求める体積は，

$$V\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{32\sqrt{3}}{27}\pi$$

である。

3

〔解答〕

問 1	$\boxed{23}$	$\boxed{24}$					
	2	4					
問 2	$\boxed{25}$	$\boxed{26}$	$\boxed{27}$	$\boxed{28}$	$\boxed{29}$	$\boxed{30}$	$\boxed{31}$
	1	4	3	1	1	1	1
問 3	$\boxed{32}$	$\boxed{33}$	$\boxed{34}$	$\boxed{35}$	$\boxed{36}$	$\boxed{37}$	$\boxed{38}$
	3	1	1	6	6	4	4

〔解説〕

問 1

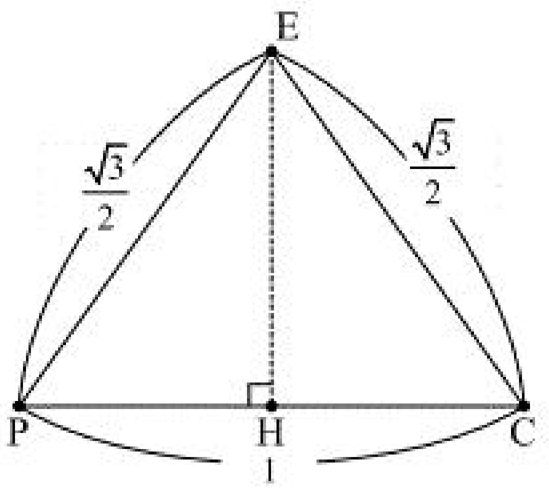
$t=1$ のとき，P は B と一致する。E が AD の中点であり，かつ三角形 APD は正三角形であるから，

$$\begin{aligned}\mathrm{PE} &= \mathrm{PA}\sin 60^\circ \\ &= 1\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

であり，かつ対称性より

$$\begin{aligned}\mathrm{CE} &= \mathrm{PE} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

となる。したがって，△CEP は以下の図の通りである。



よって，PC の中点を H とすれば，三平方の定理から，

$$\mathrm{EH}=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

であるから，求める面積は，

$$S(1)=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{4}$$

と求まる。

問 2

$\overrightarrow{\mathrm{CA}}=\vec{a}, \overrightarrow{\mathrm{CB}}=\vec{b}, \overrightarrow{\mathrm{CD}}=\vec{d}$ とすると，ABCD は 1 辺の長さが 1 の正四面体より，

$$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{d}|=1$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{d}=\vec{a}\cdot\vec{d}=1\cdot 1\cdot\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$$

である。また，

$$\overrightarrow{\mathrm{CP}}=(1-t)\vec{a}+t\vec{b}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{CE}}=\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{d}$$

であるから，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{CP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CE}} &= \left\{(1-t)\vec{a}+t\vec{b}\right\}\cdot\left(\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{d}\right) \\ &= \frac{1-t}{2}|\vec{a}|^2+\frac{t}{2}\vec{a}\cdot\vec{b}+\frac{1-t}{2}\vec{a}\cdot\vec{d}+\frac{t}{2}\vec{b}\cdot\vec{d} \\ &= \frac{1-t}{2}+\frac{t}{4}+\frac{1-t}{4}+\frac{t}{4} \\ &= \frac{1}{4}(3-t)\end{aligned}$$

であり，

$$\begin{aligned}\left|\overrightarrow{\mathrm{CP}}\right|^2 &= \overrightarrow{\mathrm{CP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CP}} \\ &= (1-t)^2|\vec{a}|^2+2(1-t)t\vec{a}\cdot\vec{b}+t^2|\vec{b}|^2 \\ &= (1-t)^2+(1-t)t+t^2 \\ &= t^2-t+1\end{aligned}$$

と求まる。

問 3

問 2 より，

$$\begin{aligned}S(t) &= \frac{1}{2}\sqrt{\left|\overrightarrow{\mathrm{CP}}\right|^2\left|\overrightarrow{\mathrm{CE}}\right|^2-\left(\overrightarrow{\mathrm{CP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CE}}\right)^2} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{(t^2-t+1)\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2-\left(\frac{3-t}{4}\right)^2} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{11}{16}t^2-\frac{3}{8}t+\frac{3}{16}} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{11}{16}\left(t-\frac{3}{11}\right)^2+\frac{3}{22}}\end{aligned}$$

と表されるから，$0\leqq t\leqq 1$ において，$S(t)$ は $t=\frac{3}{11}$ のとき，最小値 $S\left(\frac{3}{11}\right)=\frac{\sqrt{66}}{44}$ をとる。

4

〔解答〕

問 1	$\boxed{39}$	$\boxed{40}$	$\boxed{41}$	$\boxed{42}$	$\boxed{43}$	$\boxed{44}$	$\boxed{45}$	$\boxed{46}$		
	1	0	2	1	9	7	8	4		
問 2	$\boxed{47}$	$\boxed{48}$	$\boxed{49}$	$\boxed{50}$	$\boxed{51}$	$\boxed{52}$	$\boxed{53}$	$\boxed{54}$	$\boxed{55}$	$\boxed{56}$
	3	5	2	8	5	6	1	4	3	5

〔解説〕

問 1

(a, b, c)の組み合わせは,

$$13^3 = 2197$$

通りであり，これらは同様に確からしい。また，$a+b+c=6$を満たす(a, b, c)の数の組み合わせは,

$$\{1, 1, 4\}, \{1, 2, 3\}, \{2, 2, 2\}$$

である。したがって，$a+b+c=6$を満たす(a, b, c)の組み合わせは,

$$\begin{aligned} {}_3\mathrm{C}_1 + {}_3\mathrm{C}_1 \cdot {}_2\mathrm{C}_1 + 1 &= 3+3\cdot 2+1 \\ &= 10 \end{aligned}$$

通りである。したがって，$a+b+c=6$となる確率P_1は,

$$P_1 = \frac{10}{2197}$$

である。また，$a+b+c=6$のときのabcの値は,

$$\begin{cases} 1\cdot 1\cdot 4 = 4 \\ 1\cdot 2\cdot 3 = 6 \\ 2\cdot 2\cdot 2 = 8 \end{cases}$$

のいずれかであるから，最大値は8であり，最小値は4である。

問 2

(a, b, c, d)の組み合わせは,

$$13^4 = 28561$$

通りであり，これらは同様に確からしい。また，$a+b+c+d=8$を満たす(a, b, c, d)の数の組み合わせは,

$$\{1, 1, 1, 5\}, \{1, 1, 2, 4\}, \{1, 1, 3, 3\} \{1, 2, 2, 3\}, \{2, 2, 2, 2\}$$

である。したがって，$a+b+c+d=8$を満たす(a, b, c, d)の組み合わせは,

$$\begin{aligned} {}_4\mathrm{C}_1 + {}_4\mathrm{C}_1 \cdot {}_3\mathrm{C}_1 + {}_4\mathrm{C}_2 + {}_4\mathrm{C}_1 \cdot {}_3\mathrm{C}_1 + 1 &= 4+4\cdot 3+6+4\cdot 3+1 \\ &= 35 \end{aligned}$$

通りである。したがって，$a+b+c+d=8$となる確率P_2は,

$$P_2 = \frac{35}{28561}$$

である。また，$a+b+c+d=8$のときの$abcd$の値は,

$$\begin{cases} 1\cdot 1\cdot 1\cdot 5 = 5 \\ 1\cdot 1\cdot 2\cdot 4 = 8 \\ 1\cdot 1\cdot 3\cdot 3 = 9 \\ 1\cdot 2\cdot 2\cdot 3 = 12 \\ 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2 = 16 \end{cases}$$

のいずれかであるから，$abcd$が最小となるのは，$\{1, 1, 1, 5\}$のときであり，求める条件つき確率は,

$$\frac{\dfrac{4}{28561}}{\dfrac{35}{28561}} = \frac{4}{35}$$

である。