

【解答】

問 1	1	2	3	4	5	6
	—	1	8	1	2	0
問 2	7	8	9	10	11	12
	5	6	5	3	2	1

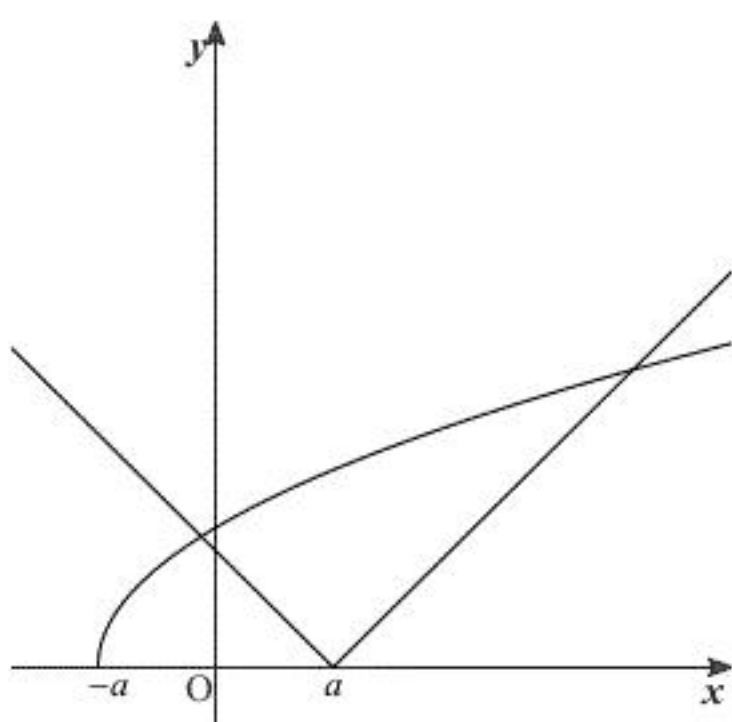
【解説】

問 1

$y = \sqrt{x+a}$ は x 軸を軸とする放物線のうち $y \geq 0$ の部分である。これをもとにまず、 a の正負で場合分けして共有点の個数について考える。

[1] $a \geq 0$ のとき

$y = \sqrt{x+a}$, $y = |-x+a|$ を図示すると以下のようになる。



上図のように $a \geq 0$ では $y = \sqrt{x+a}$, $y = |-x+a|$ は共有点を 2 つ持つ。

[2] $a < 0$ のとき

このとき

$$y = |-x+a| = \begin{cases} -x+a & (x \leq a < 0) \\ x-a & (x > a) \end{cases}$$

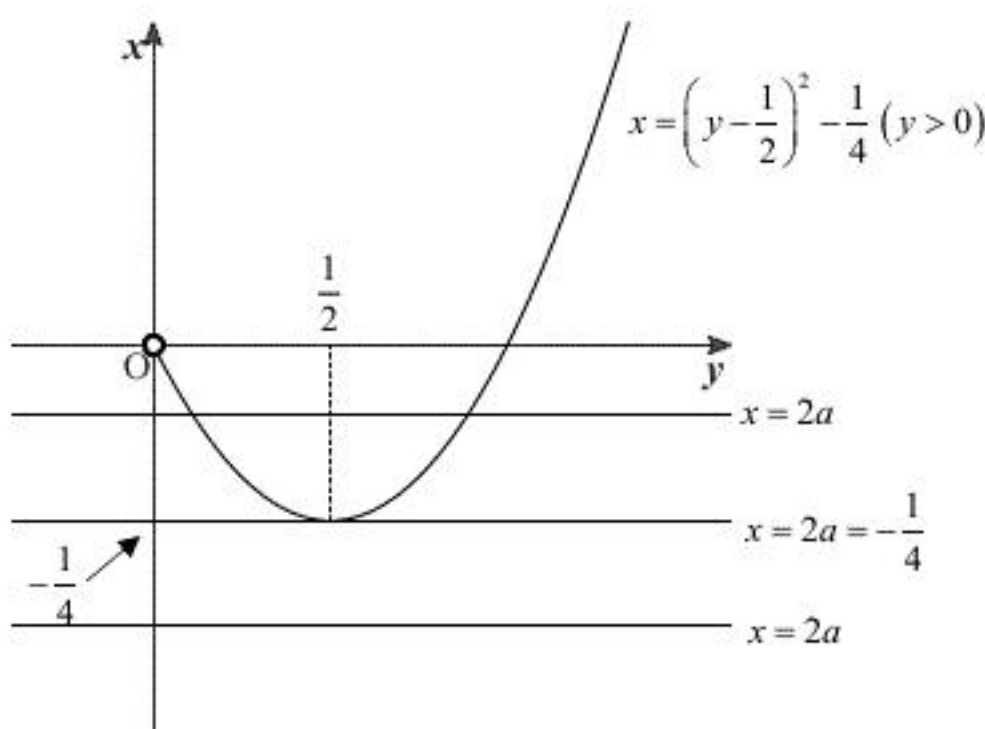
であり、 $y = \sqrt{x+a}$ の定義域は $x \geq -a > 0$ であるから、以後 $x > a$ すなわち $y > 0$ における

$y = x-a$ と $y = \sqrt{x+a}$ の共有点の数について考える。 $y = \sqrt{x+a} \Leftrightarrow y^2 = x+a$ ($y > 0$) と

$y = x-a$ から x を消去して連立すると

$$\begin{aligned} y^2 &= y+a+a \\ \Leftrightarrow \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} &= 2a \end{aligned}$$

となるから、以下 $x = \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$, $x = 2a$ の $y > 0$ における共有点を考える。これらを図示すると以下のようになる。



上図より、 $2a = -\frac{1}{4} \Leftrightarrow a = -\frac{1}{8}$ のとき共有点は 1 つあり、 $-\frac{1}{8} < a < 0$ のとき共有点は 2 つあり、 $a < -\frac{1}{8}$ のとき共有点はない。

以上[1], [2]から、 $a = -\frac{1}{8}$ のとき共有点は 1 つあり、 $a > -\frac{1}{8}$ のとき共有点は 2 つあり、 $a < -\frac{1}{8}$ のとき共有点はない。

問 2

$a > 0, b > 0$ から、相加相乗平均の関係を用いて

$$\frac{2b}{3a} + \frac{9a}{8b} \geq 2\sqrt{\frac{2b}{3a} \cdot \frac{9a}{8b}} = \sqrt{3}$$

となる。等号成立条件は $\frac{2b}{3a} = \frac{9a}{8b} \Leftrightarrow \frac{b}{a} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$ である。 $\frac{2b}{3a} + \frac{9a}{8b} + \tan \alpha$ の最小値が $\frac{2}{\sqrt{3}}$ である

から、 $\tan \alpha = \frac{2}{\sqrt{3}} - \sqrt{3} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ となる。 $0 < \alpha < \pi$ であるから、 $\alpha = \frac{5}{6}\pi$ となる。いま、

$\tan \beta = \frac{3\sqrt{3}}{4}$ であるから

$$\begin{aligned} \tan(\alpha + \beta) &= \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} \\ &= \frac{-\frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{3\sqrt{3}}{4}}{1 + \frac{3}{4}} \\ &= \frac{5\sqrt{3}}{21} \end{aligned}$$

となる。

【解答】

問 1	13	14	15	16	17
	2	1	2	2	1
問 2	18	19	20		
	—	1	2		
問 3	21	22	23	24	
	—	3	8	5	

【解説】

問 1

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \{(x+a)^4 - 4\} \cdot (x+a)' - \{x^4 - 4\} \cdot x' \\
 &= (x+a)^4 - x^4 \\
 &= \{(x+a)^2 - x^2\} \{(x+a)^2 + x^2\} \\
 &= a(2x+a)(2x^2 + 2ax + a^2)
 \end{aligned}$$

となる。

問 2

問 1 の結果より

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= 0 \\
 \Leftrightarrow a(2x+a)\{(x+a)^2 + x^2\} &= 0
 \end{aligned}$$

である。ここで、 $(x+a)^2 + x^2 > 0$ より、求める x の値は $x = -\frac{1}{2}a$ である。

問 3

問 1, 2 の結果より、 $f(x)$ の増減表は以下のようになる。

x	...	$-\frac{a}{2}$	...
$f'(x)$	—	0	+
$f(x)$	$\searrow$	$f\left(-\frac{a}{2}\right)$	$\nearrow$

上表より、 $f(x)$ の最小値は $f\left(-\frac{a}{2}\right)$ であり、 $a=2$ のとき

$$\begin{aligned}
 f\left(-\frac{a}{2}\right) &= \int_{-1}^1 (t^4 - 4) dt \\
 &= 2 \int_0^1 (t^4 - 4) dt \\
 &= 2 \left[\frac{t^5}{5} - 4t \right]_0^1 \\
 &= \frac{2}{5} - 8 \\
 &= -\frac{38}{5}
 \end{aligned}$$

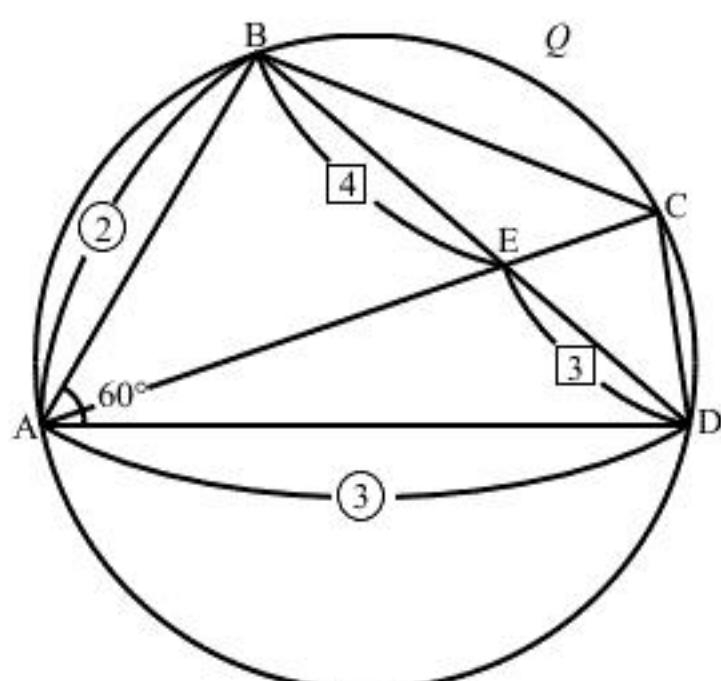
となる。

【解答】

問 1	25	26	27	28	29
	3	2	2	1	7
問 2	30	31	32		
	6	3	7		
問 3	33	34	35	36	
	9	3	1	4	
問 4	37	38	39	40	
	3	3	1	4	

【解説】

問 1



四角形 ABCD が内接する半径1の円を Q とする。問題文の条件より、 $\triangle ABD$ は円 Q に内接するから、正弦定理より

$$2 = \frac{BD}{\sin \angle BAD}$$

$$\therefore BD = \sqrt{3}$$

となる。ここで、 $AB = 2x$ とすると、 $\triangle ABD$ において余弦定理から

$$\cos \angle BAD = \frac{AB^2 + AD^2 - BD^2}{2AB \cdot AD}$$

$$\Leftrightarrow \frac{4x^2 + 9x^2 - 3}{12x^2} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 7x^2 = 3$$

$$\therefore x = \frac{\sqrt{21}}{7} \quad (\because x > 0)$$

となる。したがって、 $AB = \frac{2\sqrt{21}}{7}$ である。

問 2

$AE = y$ とすると、 $\triangle ABD, \triangle ABE$ において余弦定理より

$$\frac{AB^2 + BD^2 - AD^2}{2AB \cdot BD} = \frac{AB^2 + BE^2 - AE^2}{2AB \cdot BE}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\frac{12}{7} + 3 - \frac{27}{7}}{2 \cdot \frac{2\sqrt{21}}{7} \cdot \sqrt{3}} = \frac{\frac{12}{7} + \frac{48}{49} - y^2}{2 \cdot \frac{2\sqrt{21}}{7} \cdot \frac{4\sqrt{3}}{7}}$$

$$\Leftrightarrow y^2 = \frac{108}{49}$$

$$\therefore y = \frac{6\sqrt{3}}{7}$$

となるから、 $AE = \frac{6\sqrt{3}}{7}$ となる。

問 3

$\triangle ABD$ の面積を S とすると

$$S = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AD \cdot \sin \angle BAD$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{2\sqrt{21}}{7} \cdot \frac{3\sqrt{21}}{7} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= \frac{9\sqrt{3}}{14}$$

となる。

問 4

方べきの定理より

$$BE \cdot ED = AE \cdot EC$$

$$\Leftrightarrow \frac{6\sqrt{3}}{7} \cdot EC = \frac{4\sqrt{3}}{7} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{7}$$

$$\therefore EC = \frac{2\sqrt{3}}{7}$$

となる。また、 $\triangle BCD$ の面積を S' とすると

$$S : S' = AE : EC$$

$$\Leftrightarrow S : S' = \frac{6\sqrt{3}}{7} : \frac{2\sqrt{3}}{7}$$

$$\therefore S : S' = 3 : 1$$

となる。以上から $S' = \frac{1}{3}S = \frac{3\sqrt{3}}{14}$ となる。

【解答】

問 1	41	42	
	1	2	
問 2	43	44	45
	－	1	2
問 3	46	47	48
	2	－	1
問 4	49	50	
	1	5	

【解説】

問 1

問題文の仮定より、第 $(n+2)$ 日目の全感染者数は、第 $(n+1)$ 日目までの全感染者数に第 $(n+2)$ 日に新たに感染する人の数を加えたものであるから、

$$S_{n+2} = S_{n+1} + 2S_n$$

が成立する。

問 2

問 1 で得た漸化式を変形すると

$$\begin{cases} S_{n+2} + S_{n+1} = 2(S_{n+1} + S_n) \\ S_{n+2} - 2S_{n+1} = -(S_{n+1} - 2S_n) \end{cases}$$

が得られる。ここで、 $\alpha < \beta$ であるから $\alpha = -1$, $\beta = 2$ となる。

問 3

問 2 の過程より

$$\begin{aligned} S_{n+2} + S_{n+1} &= 2(S_{n+1} + S_n) \\ \therefore a_{n+1} &= 2a_n \end{aligned}$$

となり、問題文の仮定より $S_1 = S_2 = 1$ であるから、 $a_1 = 2$ となる。したがって $a_n = 2^n$ となる。同様に

$$\begin{aligned} S_{n+2} - 2S_{n+1} &= -(S_{n+1} - 2S_n) \\ \therefore b_{n+1} &= -b_n \end{aligned}$$

であり、 $b_1 = -1$ であるから $b_n = (-1)^n$ となる。

問 4

問 3 の結果より

$$\begin{aligned} &\begin{cases} a_n = 2^n \\ b_n = (-1)^n \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} S_{n+1} + S_n = 2^n \\ S_{n+1} - 2S_n = (-1)^n \end{cases} \end{aligned}$$

であるから、辺々差し引いて $S_n = \frac{2^n - (-1)^n}{3}$ を得る。ここで

$$\begin{aligned} \frac{2^n - (-1)^n}{3} &> 10000 \\ \Leftrightarrow 2^n - (-1)^n &> 30000 \end{aligned}$$

となる最小の n について考える。 $2^4 = 16$, $2^5 = 32$, $2^{10} = 1024$ から

$$\begin{aligned} 2^{14} - (-1)^{14} &= 16383 \\ 2^{15} - (-1)^{15} &= 32769 \end{aligned}$$

となる。数列 $\{S_n\}$ はその漸化式から単調増加であるため、 S_n が初めて 10000 を超えるのは $n=15$ のとき、すなわち 15 日目である。