

〔解答〕

問 1	1	2	3	4	5
	－	1	2	1	6
問 2	6	7			
	7	3			

〔解説〕

問 1

条件より、3 次方程式 $ax^3 + (-4a+1)x^2 + (a+1)x + 6a = 0$ の 3 つの異なる実数解を $s > 0, \pm s \neq t$ を満たす実数 s, t を用いて $x = \pm s, t$ とおくと、 $a \neq 0$ であるから、解と係数の関係より

$$\begin{cases} s-s+t=\dfrac{4a-1}{a} \\ s\cdot(-s)+st-st=\dfrac{a+1}{a} \\ s\cdot(-s)\cdot t=-6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t=\dfrac{4a-1}{a} & \cdots \cdots \textcircled{1} \\ s^2=-\dfrac{a+1}{a} & \cdots \cdots \textcircled{2} \\ s^2t=6 & \cdots \cdots \textcircled{3} \end{cases}$$

となる。ここで、①、②を③に代入すると、

$$-\dfrac{(a+1)(4a-1)}{a^2}=6$$

$$\Leftrightarrow (a+1)(4a-1)=-6a^2$$

$$\Leftrightarrow 10a^2+3a-1=0$$

$$\Leftrightarrow (5a-1)(2a+1)=0$$

$$\therefore a=-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{5}$$

となる。この下で、 a の値によって場合分けして考える。

[1] $a=-\dfrac{1}{2}$ のとき

①、②にそれぞれ代入すると

$$t=\dfrac{4\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)-1}{-\dfrac{1}{2}}$$

$$=6$$

$$s^2=-\dfrac{-\dfrac{1}{2}+1}{-\dfrac{1}{2}}$$

$$=1$$

$$\therefore s=1\left(\because s>0\right)$$

となる。

[2] $a=\dfrac{1}{5}$ のとき

②に代入すると

$$s^2=-\dfrac{\dfrac{1}{5}+1}{\dfrac{1}{5}}$$

$$=-6$$

となるが、これは s が実数であることに反し不適である。

以上[1], [2]より、求める a の値は $a=-\dfrac{1}{2}$ で、このとき解は $x=\pm 1, 6$ となる。

問 2

実数 a, b を用いて $\int_1^2 f(t)dt=a, \int_0^3 g(t)dt=b$ とおくと

$$\begin{cases} f(x)=3x^2+2x-b \\ g(x)=x^2-6x+a \end{cases}$$

となる。したがって

$$\begin{cases} \int_1^2 \left(3t^2+2t-b\right)dt=a \\ \int_0^3 \left(t^2-6t+a\right)dt=b \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[t^3+t^2-bt\right]_1^2=a \\ \left[\dfrac{t^3}{3}-3t^2+at\right]_0^3=b \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 10-b=a & \cdots \cdots \textcircled{4} \\ -18+3a=b & \cdots \cdots \textcircled{5} \end{cases}$$

が成り立つ。ここで⑤を④に代入し

$$10-(-18+3a)=a$$

$$\Leftrightarrow 28-3a=a$$

$$\therefore a=7$$

となる。これを④に代入すると、 $b=3$ が得られる。したがって、

$$\int_1^2 f(x)dx=\int_1^2 f(t)dt=7$$

$$\int_0^3 g(x)dx=\int_0^3 g(t)dt=3$$

である。

〔解答〕

問 1	8	9	10		
	－	1	1		
問 2	11	12	13		
	1	－	3		
問 3	14	15	16	17	18
	－	1	2	3	2

〔解説〕

問 1

条件より $f'(x) = \frac{\log x}{x}$ であるから、積分定数を C として

$$\begin{aligned} f(x) &= \int \frac{\log x}{x} dx \\ &= \int \log x \cdot (\log x)' dx \\ &= \frac{1}{2} (\log x)^2 + C \end{aligned}$$

となる。よって、

$$\begin{aligned} f(1) &= \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2} (\log 1)^2 + C &= \frac{1}{2} \\ \therefore C &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

であるため、 $f(x) = \frac{1}{2} (\log x)^2 + \frac{1}{2}$ となる。したがって、 $y = f(x)$ と $y = 1$ との交点の x 座標は

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2} (\log x)^2 + \frac{1}{2} &= 1 \\ \Leftrightarrow \log x &= \pm 1 \\ \therefore x &= e^{-1}, e \end{aligned}$$

となるから、 $\alpha = e^{-1}$ 、 $\beta = e$ である。

問 2

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx &= \int_{e^{-1}}^e \frac{1}{2} \{ (\log x)^2 + 1 \} dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{e^{-1}}^e \{ (x)' \cdot (\log x)^2 + 1 \} dx \\ &= \frac{1}{2} \left[x (\log x)^2 \right]_{e^{-1}}^e - \frac{1}{2} \int_{e^{-1}}^e \left(x \cdot 2 \log x \cdot \frac{1}{x} \right) dx + \frac{1}{2} [x]_{e^{-1}}^e \\ &= e - \frac{1}{e} - \int_{e^{-1}}^e \log x dx \\ &= e - \frac{1}{e} - \int_{e^{-1}}^e (x)' \cdot \log x dx \\ &= e - \frac{1}{e} - [x \log x]_{e^{-1}}^e + \int_{e^{-1}}^e \left(x \cdot \frac{1}{x} \right) dx \\ &= -\frac{2}{e} + [x]_{e^{-1}}^e \\ &= e - \frac{3}{e} \end{aligned}$$

となる。

問 3

$f'(x) = \frac{\log x}{x}$ より、点 $(t, f(t))$ における $y = f(x)$ の接線の方程式は

$$\begin{aligned} y &= f'(t)(x-t) + f(t) \\ &= \frac{\log t}{t}(x-t) + \frac{1}{2} (\log t)^2 + \frac{1}{2} \\ &= \frac{\log t}{t}x + \frac{1}{2} (\log t)^2 - \log t + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

となる。この接線と y 軸との交点が $(0, 2)$ となるとき、

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (\log t)^2 - \log t + \frac{1}{2} &= 2 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2} (\log t)^2 - \log t - \frac{3}{2} &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2} (\log t + 1)(\log t - 3) &= 0 \\ \Leftrightarrow \log t &= -1, 3 \\ \therefore t &= \frac{1}{e}, e^3 \end{aligned}$$

である。したがって、求める方程式は

$$\begin{aligned} y &= \frac{-1}{\frac{1}{e}}x + \frac{1}{2}(-1)^2 - (-1) + \frac{1}{2} \\ &= -ex + 2 \\ y &= \frac{3}{e^3}x + \frac{1}{2} \cdot 3^2 - 3 + \frac{1}{2} \\ &= \frac{3}{e^3}x + 2 \end{aligned}$$

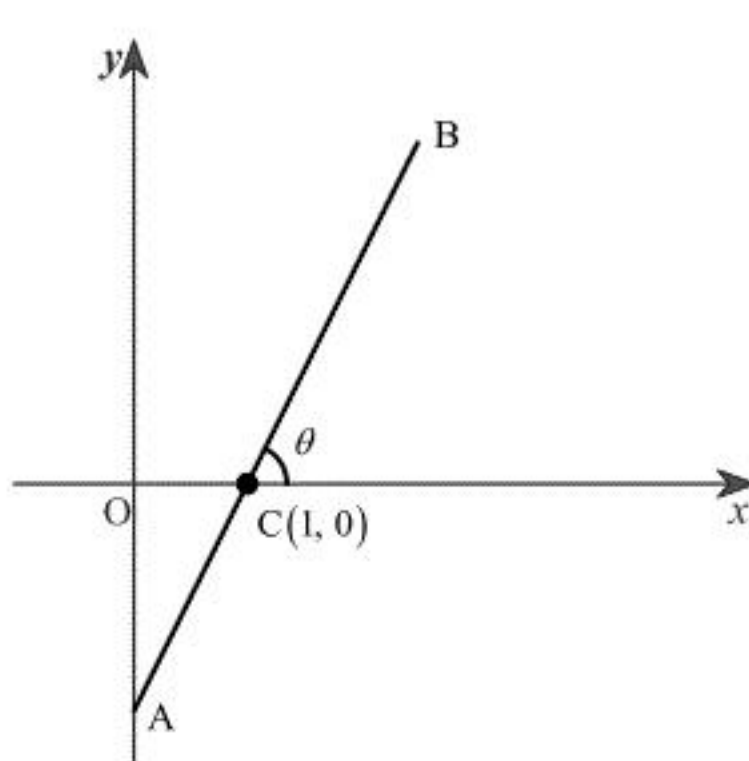
となる。

〔解答〕

問 1	19	20		
	6	1		
問 2	21	22		
	3	3		
問 3	23	24	25	26
	1	4	3	2

〔解説〕

問 1



θ の取り得る値の範囲は $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ である。前図において、対頂角の関係より $\angle ACO = \theta$ となるから

$$\begin{aligned} AC \cos \theta &= 1 \\ \therefore AC &= \frac{1}{\cos \theta} \left(\because 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \right) \end{aligned}$$

である。したがって、 $BC = AB - AC = \ell - \frac{1}{\cos \theta}$ となるから

$$\begin{aligned} d &= BC \sin \theta \\ &= \ell \sin \theta - \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \\ &= -\tan \theta + \ell \sin \theta \end{aligned}$$

と表される。

問 2

$\ell = 8$ のとき $d = -\tan \theta + 8 \sin \theta$ となるから、この右辺を $f(\theta)$ とおくと

$$\begin{aligned} f'(\theta) &= 8 \cos \theta - \frac{1}{\cos^2 \theta} \\ &= \frac{8 \cos^3 \theta - 1}{\cos^2 \theta} \\ &= \frac{(2 \cos \theta - 1)(4 \cos^2 \theta + 2 \cos \theta + 1)}{\cos^2 \theta} \end{aligned}$$

となる。ここで $4 \cos^2 \theta + 2 \cos \theta + 1 = 4 \left(\cos \theta + \frac{1}{4} \right)^2 + \frac{3}{4} > 0$ であることに注意すると、 $f(\theta)$ の増減は次表のようになる。

θ	(0)	...	$\frac{\pi}{3}$	...	$\left(\frac{\pi}{2}\right)$
$f'(\theta)$		+	0	-	
$f(\theta)$		↗	極大	↘	

したがって、 d は $\theta = \frac{\pi}{3}$ のときに最大値を取り、その値は

$$\begin{aligned} f\left(\frac{\pi}{3}\right) &= 8 \sin \frac{\pi}{3} - \tan \frac{\pi}{3} \\ &= 4\sqrt{3} - \sqrt{3} \\ &= 3\sqrt{3} \end{aligned}$$

である。

問 3

問 1 の結果より、棒を右方向に運ぶための条件は d の最大値が2以下となることである。ここで、 $\ell \leq 1$ のときは右方向へ運べることは明らかであるから、 $\ell > 1$ として考える。この下で $g(\theta) = -\tan \theta + \ell \sin \theta$ とおくと、

$$\begin{aligned} g'(\theta) &= \ell \cos \theta - \frac{1}{\cos^2 \theta} \\ &= \frac{\ell \cos^3 \theta - 1}{\cos^2 \theta} \\ &= \frac{\left(\ell^{\frac{1}{3}} \cos \theta - 1\right) \left(\ell^{\frac{2}{3}} \cos^2 \theta + \ell^{\frac{1}{3}} \cos \theta + 1\right)}{\cos^2 \theta} \end{aligned}$$

となる。 $\ell > 1$ より $0 < \ell^{\frac{1}{3}} < 1$ であるから、 $\cos \alpha = \ell^{\frac{1}{3}}$ を満たす α は $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ にただひとつ存

在する。ここで、 $\ell^{\frac{2}{3}} \cos^2 \theta + \ell^{\frac{1}{3}} \cos \theta + 1 = \ell^{\frac{2}{3}} \left(\cos \theta + \frac{1}{2} \ell^{\frac{1}{3}} \right)^2 + \frac{3}{4} > 0$ であることに注意すると、

$g(\theta)$ の増減表は次表のようになる。

θ	(0)	...	α	...	$\left(\frac{\pi}{2}\right)$
$g'(\theta)$		+	0	-	
$g(\theta)$		↗	極大	↘	

したがって、 d は $\theta = \alpha$ のときに最大値を取る。このとき

$$\begin{aligned} \sin \alpha &= \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} \quad (\because \sin \alpha > 0) \\ &= \sqrt{1 - \ell^{-\frac{2}{3}}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tan \alpha &= \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \\ &= \frac{\sqrt{1 - \ell^{-\frac{2}{3}}}}{\ell^{\frac{1}{3}}} \\ &= \ell^{\frac{1}{3}} \sqrt{1 - \ell^{-\frac{2}{3}}} \end{aligned}$$

であるから、最大値は

$$\begin{aligned} g(\alpha) &= -\tan \alpha + \ell \sin \alpha \\ &= -\ell^{\frac{1}{3}} \sqrt{1 - \ell^{-\frac{2}{3}}} + \ell \sqrt{1 - \ell^{-\frac{2}{3}}} \\ &= \left(\ell - \ell^{\frac{1}{3}} \right) \sqrt{1 - \ell^{-\frac{2}{3}}} \\ &= \left(\ell^{\frac{2}{3}} - 1 \right) \sqrt{\ell^{\frac{2}{3}} - 1} \\ &= \left(\ell^{\frac{2}{3}} - 1 \right)^{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

である。したがって、右方向に運ぶための条件は

$$\left(\ell^{\frac{2}{3}} - 1 \right)^{\frac{3}{2}} \leq 2$$

となる。ここで、両辺正より2乗しても同値性は保たれ

$$\begin{aligned} \left(\ell^{\frac{2}{3}} - 1 \right)^3 &\leq 4 \\ \Leftrightarrow \ell^{\frac{2}{3}} - 1 &\leq 4^{\frac{1}{3}} \\ \Leftrightarrow \ell^{\frac{2}{3}} &\leq 1 + 4^{\frac{1}{3}} \\ \therefore \ell &\leq \left(1 + 4^{\frac{1}{3}} \right)^{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

となる。したがって、求める ℓ の最大値は $\left(1 + \sqrt[3]{4} \right)^{\frac{3}{2}} [\text{m}]$ である。

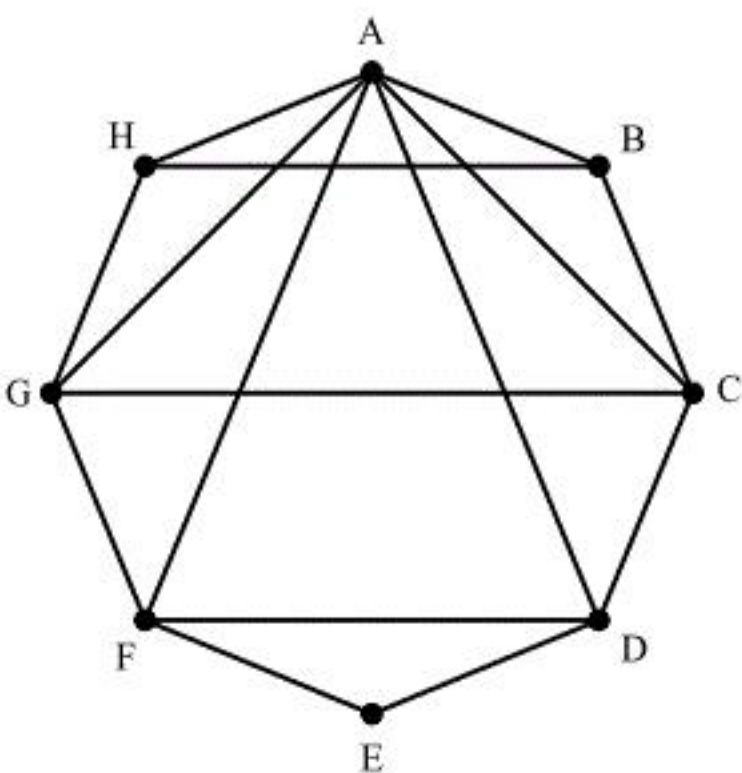
【解答】

問 1		27	28	29	30
		2	4	3	2
問 2		31	32	33	34
		1	7	2	7
問 3		35			
		5			
問 4	(1)	36	37	38	39
		1	1	4	9
	(2)	40	41		
		1	7		

【解説】

問 1

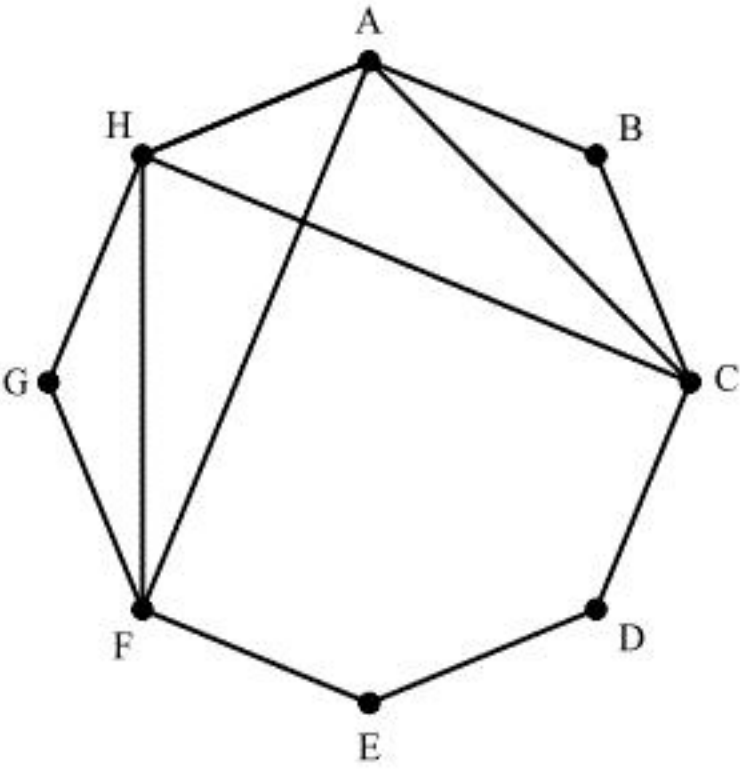
頂点の選び方は ${}_8C_3=56$ (通り)であり、これらは同様に確からしい。ここで、点 A が頂点となる二等辺三角形は、 $\triangle AHB$, $\triangle AGC$, $\triangle AFD$ の 3 通りである。



また、点 B, C, ..., H が頂点となる二等辺三角形も同様にそれぞれ 3 通りずつ存在するから、できる三角形が二等辺三角形である場合の数は $8 \cdot 3 = 24$ (通り) である。また、できる三角形が正三角形となるような頂点の選び方は存在しないから、すべての辺の長さが異なる三角形である場合の数は $56 - 24 = 32$ (通り) である。

問 2

問 1 の結果より $\triangle AHB$ と合同な三角形は 8 通り存在するから、できる三角形が $\triangle AHB$ と合同である確率は $\frac{8}{56} = \frac{1}{7}$ である。また、 $\triangle AHC$ と合同な三角形は、線分 AH を固定して考えると $\triangle AHC$, $\triangle AHF$ の 2 種類存在する。



また、線分 AB, BC, CD, ..., GH をそれぞれ辺にもち $\triangle AHC$ と合同な三角形も 2 通りずつ存在するから、できる三角形が $\triangle AHC$ と合同である確率は $\frac{2 \cdot 8}{56} = \frac{2}{7}$ である。

問 3

合同な三角形を同じ種類とみなすとき、問 1 より二等辺三角形は 3 種類あり、全ての辺の長さが異なる三角形は $\triangle AHC$, $\triangle AHD$ の 2 種類である。よって、できる三角形は $3 + 2 = 5$ (種類) である。

問 4(1)

$\triangle AHB$ の場合と同様に考えると、 $\triangle AGC$, $\triangle AFD$ と合同な三角形は 8 通り存在するから、3 種類の二等辺三角形と合同な三角形ができる確率はそれぞれ $\frac{1}{7}$ である。また、 $\triangle AHC$ の場合と同様に考えると、 $\triangle AHD$ と合同な三角形は 16 通り存在するから、2 種類のすべての辺の長さが異なる三角形と合同な三角形ができる確率はそれぞれ $\frac{2}{7}$ である。1 回目と 2 回目の試行は独立であるから、1 回目にできる三角形と 2 回目にできる三角形が合同である確率は

$$\frac{1}{7} \cdot \frac{1}{7} \cdot 3 + \frac{2}{7} \cdot \frac{2}{7} \cdot 2 = \frac{11}{49}$$

である。

(2)

1 回目にできる三角形が二等辺三角形となるという事象を A 、2 回目にできる三角形が 1 回目の三角形と合同となるという事象を B とし、事象 A が起こる確率を $P(A)$ 、事象 A が起こったもとで事象 B が起こる条件付き確率を $P_A(B)$ とすると、

$$\begin{aligned} P_A(B) &= \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \\ &= \frac{\frac{1}{7} \cdot \frac{1}{7} \cdot 3}{\frac{24}{56}} \\ &= \frac{1}{7} \end{aligned}$$

となる。