

【解答】

問 1	10	
	4	
問 2	11	12
	2	4
問 3	13	14
	8	2

【解説】

問 1

定積分 $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \log \left\{ \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) \right\} dx$ において、変数 x を $x + \frac{\pi}{4} = \pi - \theta$ により θ に置き換えると、

$dx = -d\theta$ であり、積分区間の対応関係は以下のようになる。

x	$\frac{\pi}{4}$	$\rightarrow$	$\frac{\pi}{2}$
θ	$\frac{\pi}{2}$	$\rightarrow$	$\frac{\pi}{4}$

このとき、

$$\begin{aligned} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \log \left\{ \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) \right\} dx &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \log \{ \sin (\pi - \theta) \} \cdot (-d\theta) \\ &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \log (\sin \theta) d\theta \end{aligned}$$

と変形でき、再び θ を x と書き換えることで

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \log \left\{ \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) \right\} dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \log (\sin x) dx$$

と変形できる。

問 2

三角関数の合成を考えると、三角関数の加法定理から任意の実数 x に対して、

$$\sin x + \cos x = \sqrt{2} \left(\sin x \cos \frac{\pi}{4} + \cos x \sin \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2} \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right)$$

が成り立つ。

問 3

$$\begin{aligned} I &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \log \left(\frac{\cos x}{\sin x} + 1 \right) dx \\ &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \log \frac{\cos x + \sin x}{\sin x} dx \\ &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \log (\cos x + \sin x) dx - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \log (\sin x) dx \end{aligned}$$

となる。ここで、問 1、問 2 より、

$$\begin{aligned} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \log (\cos x + \sin x) dx &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \log \left\{ \sqrt{2} \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) \right\} dx \\ &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \log \left\{ \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) \right\} dx + \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \log 2 dx \\ &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \log (\sin x) dx + \frac{\pi}{8} \log 2 \end{aligned}$$

となるから、

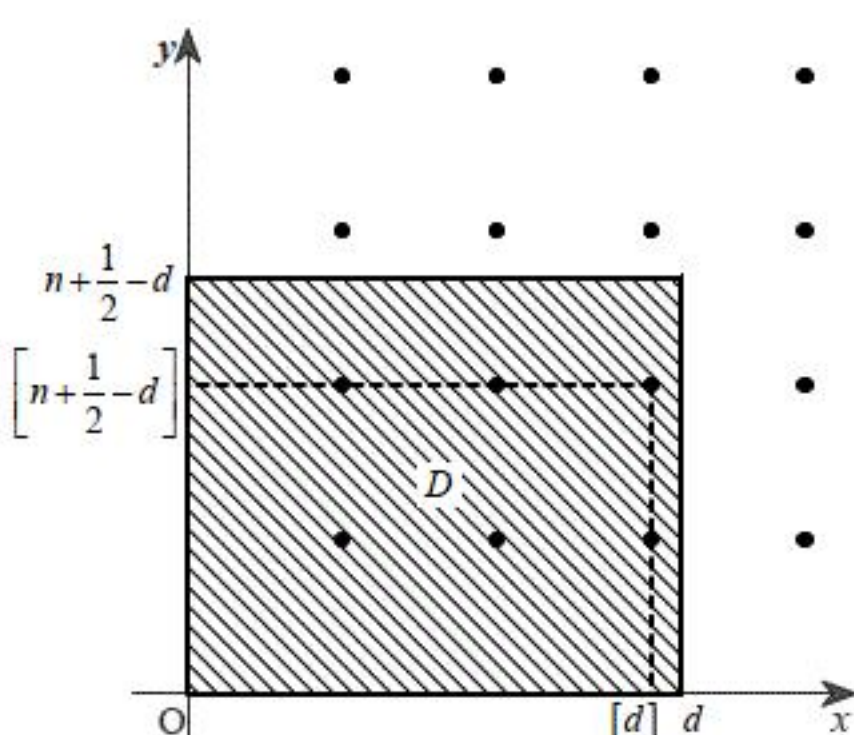
$$\begin{aligned} I &= \left(\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \log (\sin x) dx + \frac{\pi}{8} \log 2 \right) - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \log (\sin x) dx \\ &= \frac{\pi}{8} \log 2 \end{aligned}$$

となる。

【解答】

問 1	15	16	17	18
	2	2	5	1
問 2	19	20		
	4	8		
問 3	21	22		
	7	2		

【解説】



実数 x について、 x を超えない最大の整数を $[x]$ と表す。

このとき、上の図のように、 x 座標、 y 座標ともに自然数である点の中で D に含まれるものの個数 $m(d)$ は

$$m(d) = [d] \cdot \left[n + \frac{1}{2} - d \right]$$

となる。

問 1

n が自然数であることから、

$$m(1) = [1] \cdot \left[n + \frac{1}{2} - 1 \right] = 1 \cdot \left[n - \frac{1}{2} \right] = n - 1$$

$$m\left(\frac{3}{2}\right) = \left[\frac{3}{2}\right] \cdot \left[n + \frac{1}{2} - \frac{3}{2} \right] = 1 \cdot [n - 1] = n - 1$$

$$m(2) = [2] \cdot \left[n + \frac{1}{2} - 2 \right] = 2 \cdot \left[n - \frac{3}{2} \right] = 2(n - 2) = 2n - 4$$

となる。また、

$$\lim_{d \rightarrow \frac{3}{2}+0} [d] = \lim_{d \rightarrow 2-0} [d] = 1, \quad \lim_{d \rightarrow \frac{3}{2}+0} \left[n + \frac{1}{2} - d \right] = \lim_{d \rightarrow 2-0} \left[n + \frac{1}{2} - d \right] = n - 2$$

であるから、

$$\lim_{d \rightarrow \frac{3}{2}+0} m(d) = \lim_{d \rightarrow 2-0} m(d) = 1 \cdot (n - 2) = n - 2$$

となる。

問 2

$k \leq d \leq k + \frac{1}{2}$ のとき $n - k \leq n + \frac{1}{2} - d \leq n - k + \frac{1}{2}$ であり、 n, k はともに自然数であるから、

$[d] = k, \left[n + \frac{1}{2} - d \right] = n - k$ となる。よって、

$$m(d) = [d] \cdot \left[n + \frac{1}{2} - d \right] = k(n - k) = nk - k^2$$

である。

また、 $k + \frac{1}{2} < d < k + 1$ のとき $n - k - \frac{1}{2} < n + \frac{1}{2} - d < n - k$ であり、 n, k はともに自然数であるから、

$[d] = k, \left[n + \frac{1}{2} - d \right] = n - k - 1$ となる。よって、

$$m(d) = [d] \cdot \left[n + \frac{1}{2} - d \right] = k(n - k - 1) = nk - k^2 - k$$

である。

問 3

$d = n = 17$ のとき、

$$m(d) = [17] \cdot \left[17 + \frac{1}{2} - 17 \right] = 0$$

である。また、 $1 \leq d < n$ のとき、問 2 において $k = [d]$ とすれば k は $n - 1$ 以下の任意の自然数

をとり、 k がこの範囲を動くとき、区間 $k \leq d \leq k + \frac{1}{2}$ 、 $k + \frac{1}{2} < d < k + 1$ の和集合は $1 \leq d < n$ と一致する。

このとき、 $nk - k^2 > nk - k^2 - k$ であるから、 $n = 17$ のときの $m(d)$ ($1 \leq d < n$) の最大値は、 k が

$17 - 1 = 16$ 以下の自然数をとるときの $nk - k^2 = 17k - k^2$ の最大値に等しい。

ここで、

$$17k - k^2 = -\left(k - \frac{17}{2}\right)^2 + \frac{289}{4}$$

であるから、 $k = 8, 9$ のとき最大値 $17 \cdot 8 - 8^2 = 17 \cdot 9 - 9^2 = 72$ をとる。

以上から、 $m(d)$ の $1 \leq d < n$ における最大値は 72、 $d = n$ における最大値は 0 であり、 d は

$1 \leq d \leq n$ の実数値をとる変数であることから、 $n = 17$ のとき、 $m(d)$ ($1 \leq d < n$) の最大値は 72 である。

【解答】

問 1	$\boxed{23}$	$\boxed{24}$	$\boxed{25}$	$\boxed{26}$			
	1	1	1	6			
問 2	$\boxed{27}$	$\boxed{28}$	$\boxed{29}$	$\boxed{30}$	$\boxed{31}$	$\boxed{32}$	$\boxed{33}$
	2	1	9	1	0	2	4
問 3	$\boxed{34}$	$\boxed{35}$	$\boxed{36}$	$\boxed{37}$	$\boxed{38}$	$\boxed{39}$	$\boxed{40}$
	2	6	7	4	0	9	6

【解説】

問 1

4枚のコインを同時に投げたとき、それぞれのコインについて表が出るか出ないかの場合の総数は $2^4=16$ (通り)である。

この1回の試行において、表が出るコインの枚数が2以上になるのは、表が出るコインの枚数が2, 3, 4のいずれかのときである。そのそれぞれについて表が出るコインの組み合わせを考えると、表が出るコインの枚数が2以上になる確率は、

$$\frac{{}_4C_2+{}_4C_3+{}_4C_4}{16}=\frac{6+4+1}{16}=\frac{11}{16}$$

である。

この試行を4回繰り返すときそれぞれの試行は独立であることから、4回のすべてで表が出るコインの枚数が2以上になる確率は、

$$\left(\frac{11}{16}\right)^4$$

である。

問 2

問1と同様に考えると、4枚のコインを同時に投げる1回の試行において表が出るコインの枚数が3以上になるのは表が出るコインの枚数が3, 4のいずれかのときであるから、その確率は、

$$\frac{{}_4C_3+{}_4C_4}{16}=\frac{4+1}{16}=\frac{5}{16}$$

である。よって、4回のすべてで表が出るコインの枚数が3以上になる確率は、

$$\left(\frac{5}{16}\right)^4$$

である。

ここで、4回の中で表が出るコインの枚数の最小値が2となるのは、4回のすべてで表が出るコインの枚数が2以上になるが、すべてで3以上にはならないときである。また、4回のすべてで表が出るコインの枚数が3以上になるときは、必ずすべてで2以上になる。

以上から、4回の中で表が出るコインの枚数の最小値が2である確率は、

$$\begin{aligned}\left(\frac{11}{16}\right)^4-\left(\frac{5}{16}\right)^4 &= \left\{\left(\frac{11}{16}\right)^2+\left(\frac{5}{16}\right)^2\right\}\left\{\left(\frac{11}{16}\right)^2-\left(\frac{5}{16}\right)^2\right\} \\ &= \frac{73}{128} \cdot \frac{3}{8} \\ &= \frac{219}{1024}\end{aligned}$$

である。

問 3

4回のすべてで表が出るコインの枚数が x 以上 y 以下になる事象を $R_{x,y}$ とし、事象 X が起きる確率を $P(X)$ とする。このとき、問2と同様に考えると、4回の中で表が出るコインの枚数の最小値が2、かつ最大値が4である確率は

$$P(R_{2,4})-P(R_{3,4}\cup R_{2,3})$$

となる。ここで、

$$P(R_{2,4})=\left(\frac{{}_4C_2+{}_4C_3+{}_4C_4}{16}\right)^4=\left(\frac{11}{16}\right)^4$$

であり、また

$$\begin{aligned}P(R_{3,4}\cup R_{2,3}) &= P(R_{3,4})+P(R_{2,3})-P(R_{3,4}\cap R_{2,3}) \\ &= P(R_{3,4})+P(R_{2,3})-P(R_{3,3}) \\ &= \left(\frac{{}_4C_3+{}_4C_4}{16}\right)^4+\left(\frac{{}_4C_2+{}_4C_3}{16}\right)^4-\left(\frac{{}_4C_3}{16}\right)^4 \\ &= \left(\frac{5}{16}\right)^4+\left(\frac{5}{8}\right)^4-\left(\frac{1}{4}\right)^4\end{aligned}$$

である。以上から、求める確率は

$$\begin{aligned}P(R_{2,4})-P(R_{3,4}\cup R_{2,3}) &= \left\{\left(\frac{11}{16}\right)^4-\left(\frac{5}{16}\right)^4\right\}-\left\{\left(\frac{5}{8}\right)^4-\left(\frac{1}{4}\right)^4\right\} \\ &= \frac{219}{1024}-\left\{\left(\frac{5}{8}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^2\right\}\left\{\left(\frac{5}{8}\right)^2-\left(\frac{1}{4}\right)^2\right\} \\ &= \frac{219}{1024}-\frac{29}{64}\cdot\frac{21}{64} \\ &= \frac{267}{4096}\end{aligned}$$

となる。