

数 学

(理 学 部・工 学 部)

(平 成 11 年 度)

問題冊子 1～2 ページ 答案用紙 4 枚

注 意 事 項

1. 試験開始の合図があるまで、この冊子を開いてはいけない。
2. 配布された用紙に枚数の不足や、印刷に不鮮明な箇所がある場合には申し出ること。
3. 受験番号は、答案用紙 1 枚ごとに所定の欄 2 箇所に必ず記入すること。記入を忘れたり、誤った番号を記入したりしたときは採点されないことがある。
4. 解答は必ず答案用紙の指定された箇所へ記入すること。やむをえず裏面まで解答がおよぶ場合には、その旨を表面に明記し、かつ、受験番号等が記載されている部分(上部、右部分)の裏には記入しないこと。
5. 試験が終了したら、4 枚の答案用紙を上から ①, ②, ③, ④ の順になるように机上におくこと。
6. 退場するときは、問題冊子を持ち帰ること。

1

a を実数とし、区間 $(-1, \infty)$ において関数 $f(x)$ を次のように定める。

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} & (-1 < x \leq 0 \text{ のとき}) \\ ax & (0 < x \text{ のとき}) \end{cases}$$

ただし、 $f(x)$ は $x=0$ で微分可能であるものとする。

- (1) a を求めよ。
- (2) 導関数 $f'(x)$ が $x=0$ で微分可能であることを示せ。
- (3) $f(x)$ の第2次導関数 $f''(x)$ を求め、 $y=f''(x)$ のグラフの概形をかけ。

2

$0 < a \leq 1$, $0 < b \leq 1$, $0 < c \leq 1$ に対して

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

とおく。

任意の整数 m に対して $f(m)$ が整数となるとき a, b, c を求めよ。

3

実数 a, b, c, d に対して

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

とおく。

$$x^2 - (a + d)x + ad - bc = 0$$

は異なる複素数解 $s + it, s - it$ (s, t は実数, $t > 0, i = \sqrt{-1}$) をもつとし,

$$s + it = r(\cos \theta + i \sin \theta), \quad r > 0$$

と表す。

$$J = \frac{1}{t}(A - sI), \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

とおくとき、次の問に答えよ。

- (1) $J^2 = -I$ を示せ。
- (2) 自然数 $n = 1, 2, 3, \dots$ に対して

$$A^n = s_n I + t_n J, \quad \text{ただし } s_n = r^n \cos n\theta, \quad t_n = r^n \sin n\theta$$

が成り立つことを示せ。

4

xyz 空間内の平面 $y = 1$ 上で

$$(x - 1)^2 + z^2 \leq 1, \quad y = 1$$

で表される図形を D とする。 D を z 軸のまわりに 1 回転させてできる立体を M とする。

- (1) 平面 $z = k$ ($-1 \leq k \leq 1$) による立体 M の切り口を図示し、その面積を求めよ。
- (2) 立体 M の体積を求めよ。