

1

次の各問に答えよ。

- (1) m を自然数とするととき、定積分 $\int_0^{\pi} \cos mx \sin^2 x \, dx$ を求めよ。
- (2) 次の条件を満たす複素数 w で絶対値が最小のものを求めよ。

条件： $|z| \leq 1$ かつ $z + w \neq 0$ であるようなすべての複素数 z に対して、
 $z + w$ の偏角は 0° 以上 120° 以下になる。

2

関数 $f(x)$ を次のように定める。

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x & (x > 0 \text{ のとき}) \\ 0 & (x \leq 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

実数 a に対して、 $f(x) + (x - a)^2$ の最小値を $g(a)$ とおく。

このとき、関数 $y = g(x)$ を求め、そのグラフを座標平面上に図示せよ。

3

b, c を実数とする。実数を成分にもつ 2 次の正方行列 $X = \begin{pmatrix} x & y \\ y & z \end{pmatrix}$ で、

$$X^2 + bX + cE = O \quad (E \text{ は単位行列, } O \text{ は零行列})$$

を満たすものが無数にあるための、 b と c についての必要十分条件を求めよ。

座標空間に、点 $(0, 1, 0)$ を通り、ベクトル $\vec{d} = (1, 0, 1)$ に平行な直線 l と点 $A\left(0, \frac{1}{2}, 0\right)$ がある。

- (1) x 軸上の点 $P(t, 0, 0)$ から直線 l に下ろした垂線の足 H の座標を求めよ。
- (2) $\cos \angle APH$ を t の式で表わせ。
- (3) $\angle APH$ を最大にするような t の値を求めよ。