

2つの数列  $\{a_n\}$ ,  $\{b_n\}$  を

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

により定める。次の問いに答えよ。

- (1)  $a_n + b_n$  を求めよ。
- (2)  $a_n$  および  $b_n$  を求めよ。
- (3)  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  および  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$  を求めよ。

空間ベクトル  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  は条件

$$|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 1, \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{c} \cdot \vec{a} = 0$$

をみたすものとする。空間内に原点  $O$  をとり、定点  $A, N$  および、実数  $t$  ( $0 < t < 2\pi$ ) を変数とする動点  $P$  を

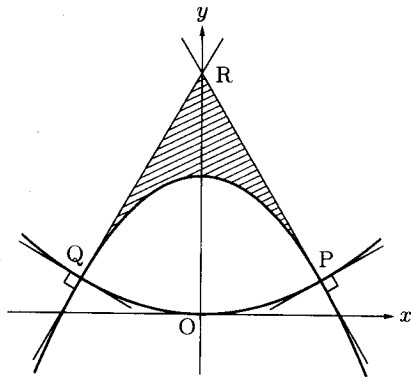
$$\overrightarrow{OA} = \vec{a}, \quad \overrightarrow{ON} = -\vec{a} + \vec{c}, \quad \overrightarrow{OP} = (\cos t)\vec{a} + (\sin t)\vec{b}$$

によって定める。次の問いに答えよ。

- (1)  $|\overrightarrow{AN}|$ ,  $|\overrightarrow{AP}|$  および  $\overrightarrow{AN} \cdot \overrightarrow{AP}$  を求めよ。
- (2)  $\triangle ANP$  の面積  $S$  を  $t$  を用いて表せ。
- (3)  $S$  の最大値を求めよ。また、そのときの  $\overrightarrow{OP}$  を  $\vec{a}, \vec{b}$  を用いて表せ。

右図のように、2つの放物線  $y = -x^2 + 1$ ,  $y = ax^2$  ( $a > 0$ ) が2点  $P, Q$  で交わり、点  $P$  における接線が互いに直交しているものとする。また、点  $P, Q$  における  $y = -x^2 + 1$  の接線の交点を  $R$  とする。次の問いに答えよ。

- (1)  $a$  の値および交点  $P$  の座標を求めよ。
- (2) 放物線  $y = -x^2 + 1$  の点  $P$  における接線の方程式を求めよ。
- (3) 斜線で示す図形  $PQR$  を  $y$  軸のまわりに1回転してできる回転体の体積を求めよ。



2 以上の自然数  $n$  に対し, 関数  $f_n(x)$  を

$$f_n(x) = 1 - x - e^{-nx}$$

と定義する。次の問いに答えよ。

- (1)  $f_n(x)$  の最大値とそのときの  $x$  を求めよ。
- (2) 方程式  $f_n(x) = 0$  の解で正のものはただ 1 つであることを示せ。
- (3) (2) の解を  $a_n$  とする。  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$  を示せ。
- (4)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{a_n} f_n(x) dx$  を求めよ。