$\boxed{1}$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ \frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix}$$ について，$B_n = A + A^2 + A^3 + \cdots + A^n$ とするとき，

次の問いに答えよ。

(1)　$B_n = p_n A + q_n E$ となる p_n と q_n を求めよ。ここで，E は単位行列とする。

(2)　$p_n + q_n \leqq 100$ を満たす最大の n とそのときの $p_n + q_n$ を求めよ。

2

平面上の原点を O とし，2 点 A, B を O, A, B が同一直線上にないようにとる。ベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ を $\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とする。
実数 r, s $(r \neq 1,\ s \neq 1)$ に対し，点 C を $\overrightarrow{\mathrm{OC}}=r\vec{a}+s\vec{b}$ となるように定める。次の問いに答えよ。

(1) 直線 OA と直線 BC の交点を P，直線 OB と直線 AC の交点を Q とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$, r, s で表せ。

(2) 線分 OC の中点を E，線分 AB の中点を F，線分 PQ の中点を G とする。$\overrightarrow{\mathrm{EF}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{EG}}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$, r, s で表せ。

(3) r, s が条件 $rs=1$ を満たしているとする。このとき $2|\overrightarrow{\mathrm{EF}}|=|\overrightarrow{\mathrm{EG}}|$ となるような r, s の組をすべて求めよ。

$\boxed{3}$

a, b を定数とする。自然数 n に対し，$f_n(x)$ を

$$f_1(x) = \sin x$$
$$f_{n+1}(x) = a\sin x + b\cos x + \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(x-2t)dt \quad (n = 1,\ 2,\ 3, \ldots)$$

で定義する。次の問いに答えよ。

(1) $f_5(x)$ を求めよ。

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{2002}(-1)^n \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(x)dx$ を求めよ。

4

関数 $f(x)$ を

$$f(x)=\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}$$

で定義する。次の問いに答えよ。

(1)　$f(x)$ のグラフの概形をかけ。

(2)　正の実数 a に対して，

$$S_a=\{x \mid -a<f(x)<a\}$$

と定める。このとき x 軸における S_a の補集合が 3 つの区間の和集合になることを示し，それらの区間の長さの和を求めよ。

◆M4(726—73)