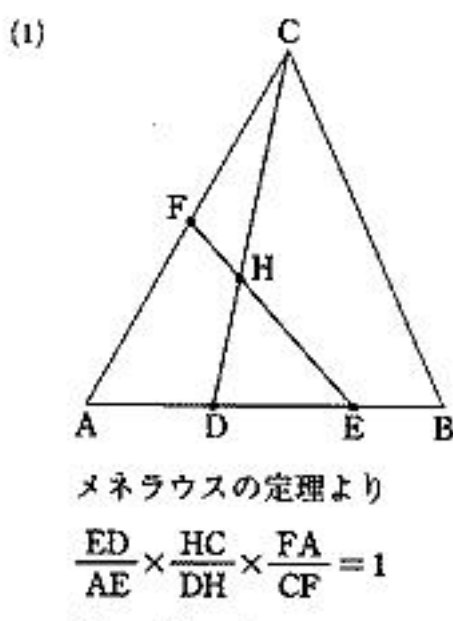


①



メネラウスの定理より

$$\frac{ED}{AE} \times \frac{HC}{DH} \times \frac{FA}{CF} = 1$$

$$\frac{1}{2} \times \frac{HC}{DH} \times \frac{1}{1} = 1$$

$$\therefore HC : DH = 2 : 1$$

$$\overrightarrow{AH} = \frac{\overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{AD}}{3} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$$

$$= \frac{1}{3}\vec{q} + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}\right)$$

$$= \frac{1}{3}\vec{q} + \frac{2}{9}\vec{p}$$

$$\overrightarrow{AH} = \frac{2}{9}\vec{p} + \frac{1}{3}\vec{q}$$

(2) $\overrightarrow{AH} = \frac{2}{9}\vec{p} + \frac{1}{3}\vec{q}$

$$\overrightarrow{AI} = \frac{2}{9}a\vec{p} + \frac{1}{3}a\vec{q}$$

I は BC 上にあるので

$$\frac{2}{9}a + \frac{1}{3}a = 1$$

$$\frac{5}{9}a = 1, \quad a = \frac{9}{5}$$

$$\therefore \overrightarrow{AI} = \frac{2}{5}\vec{p} + \frac{3}{5}\vec{q}$$

$$\therefore \overrightarrow{HI} = \overrightarrow{AI} - \overrightarrow{AH}$$

$$= \frac{8}{45}\vec{p} + \frac{4}{15}\vec{q}$$

$$\overrightarrow{HE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{FE} = \frac{2}{3}(\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AF})$$

$$= \frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}\vec{p} - \frac{1}{2}\vec{q}\right)$$

$$= \frac{4}{9}\vec{p} - \frac{1}{3}\vec{q}$$

$$\overrightarrow{HI} + \overrightarrow{HE} = \frac{8}{45}\vec{p} + \frac{4}{15}\vec{q} + \frac{4}{9}\vec{p} - \frac{1}{3}\vec{q}$$

$$= \frac{28}{45}\vec{p} - \frac{1}{15}\vec{q}$$

②

(1) $a_{n+1} = a_n + 4b_n \quad \dots \textcircled{1}$

$$b_{n+1} = a_n + b_n \quad \dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} + \textcircled{2} \times 2 \text{ は}$$

$$a_{n+1} + 2b_{n+1} = (a_n + 4b_n) + 2(a_n + b_n)$$

$$= 3a_n + 6b_n$$

$$a_{n+1} + 2b_{n+1} = 3(a_n + 2b_n)$$

$$(n = 1, 2, 3, \dots)$$

よって $n \in \mathbb{N}$ で

$$a_n + 2b_n = 3^{n-1}(a_1 + 2b_1)$$

$$= 3^{n-1}(1 + 2 \times 1) = 3^n \text{ が成立}$$

$$\text{よって } a_n + 2b_n = 3^n \quad (n \in \mathbb{N}) \quad \dots \textcircled{3}$$

($\mathbb{N}$ は自然数の集合)

(2) $\textcircled{1} - \textcircled{2} \times 2$ は

$$a_{n+1} - 2b_{n+1} = (a_n + 4b_n) - 2(a_n + b_n)$$

$$= -a_n + 2b_n = -(a_n - 2b_n)$$

よって $n \in \mathbb{N}$ で

$$a_n - 2b_n = (-1)^{n-1}(a_1 - 2b_1)$$

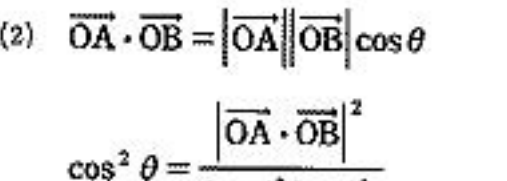
$$= (-1)^{n-1}(1 - 2) = (-1)^n$$

$$\therefore a_n - 2b_n = (-1)^n \quad (n \in \mathbb{N}) \quad \dots \textcircled{4}$$

$$\textcircled{3} + \textcircled{4} \quad 2a_n = 3^n + (-1)^n$$

$$\therefore a_n = \frac{3^n + (-1)^n}{2} \quad (n \in \mathbb{N}) \quad \dots \text{ (答)}$$

③



座標を上のおく。

(A, B は第一象限とは限らない)

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = x_A x_B + y_A y_B$$

$$x_A, x_B, y_A, y_B \in \mathbb{N}$$

($\mathbb{N}$ は整数の集合)

なので $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} \in \mathbb{N}$

(2) $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = |\overrightarrow{OA}| |\overrightarrow{OB}| \cos \theta$

$$\cos^2 \theta = \frac{|\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}|^2}{|\overrightarrow{OA}|^2 |\overrightarrow{OB}|^2}$$

ここで分母・分子ともに自然数

よって $\cos^2 \theta$ は有理数

(3) $|\triangle OAB| = \frac{1}{2} |\overrightarrow{OA}| \cdot |\overrightarrow{OB}| \sin \theta$

$$\frac{4[x_A y_B - x_B y_A]^2}{|\overrightarrow{OA}|^2 |\overrightarrow{OB}|^2} = \sin^2 \theta$$

$$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$$

$$\left| \frac{\sin 2\theta}{2} \right| = \pm \sqrt{\frac{4(x_A y_B - x_B y_A)^2}{|\overrightarrow{OA}|^2 |\overrightarrow{OB}|^2} \cdot \frac{|\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}|^2}{|\overrightarrow{OA}|^2 \cdot |\overrightarrow{OB}|^2}}$$

$$= \pm \frac{2|x_A y_B - x_B y_A| |\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}|}{|\overrightarrow{OA}|^2 |\overrightarrow{OB}|^2}$$

分母・分子とも整数。

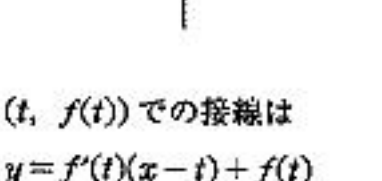
よって $\sin 2\theta$ は有理数

④

(1) $f(x) = x^3 - 3x + 1$

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1)$$

x		-1		+1	
$f'(x)$	+		-		+
$f(x)$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$



(2) $(t, f(t))$ での接線は

$$y = f'(t)(x-t) + f(t)$$

$$= 3(t^2-1)(x-t) + t^3 - 3t + 1$$

$$= 3(t^2-1)x - 3t^3 + 3t + t^3 - 3t + 1$$

$$y = 3(t^2-1)x - 2t^3 + 1 \quad \dots \textcircled{1}$$

$\textcircled{1}$ が (a, b) を通るとする

$$b = 3(t^2-1)a - 2t^3 + 1$$

$$g(t) = 2t^3 - 3(t^2-1)a - 1 + b$$

$$= 2t^3 - 3at^2 + 3a + b - 1$$

$$g(t) = 0 \text{ が 3 実根を持つ} \iff (a, b)$$

を通る接線が 3 本 $\dots \textcircled{2}$

$$g'(t) = 6t^2 - 6at = 6t(t-a)$$

$a = 0$ のとき $g(t)$ は単調増加なので

$g(t) = 0$ は 3 実根をもたない。

$a > 0$ のとき

t		0		a	
$g'(t)$	+		-		+
$g(t)$	$\nearrow$	極大値	$\searrow$	極小値	$\nearrow$

$$g(0) > 0 > g(a) \iff \textcircled{2}$$

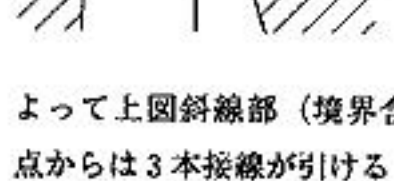
$$g(0) = 3a + b - 1$$

$$g(a) = -a^3 + 3a + b - 1$$

$$a^3 - 3a + 1 > b > -3a + 1$$

$$a < 0 \text{ のとき } g(0) < 0 < g(a) \iff \textcircled{2}$$

$$-3a + 1 < b < a^3 - 3a + 1$$



よって上図斜線部 (境界含まず) の

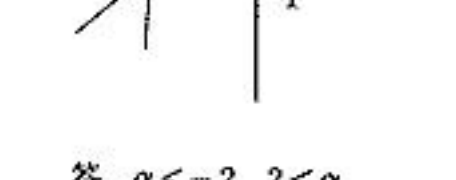
点からは 3 本接線が引ける

注 $y = -3x + 1$ は $(0, 1)$ で

$y = x^3 - 3x + 1$ に接する

$y = x^3 - 3x + 1$ と $y = x + 1$ は

$(2, 3), (-2, -1)$ で交わる。



$$\text{答 } \alpha < -2, 2 < \alpha$$