

1

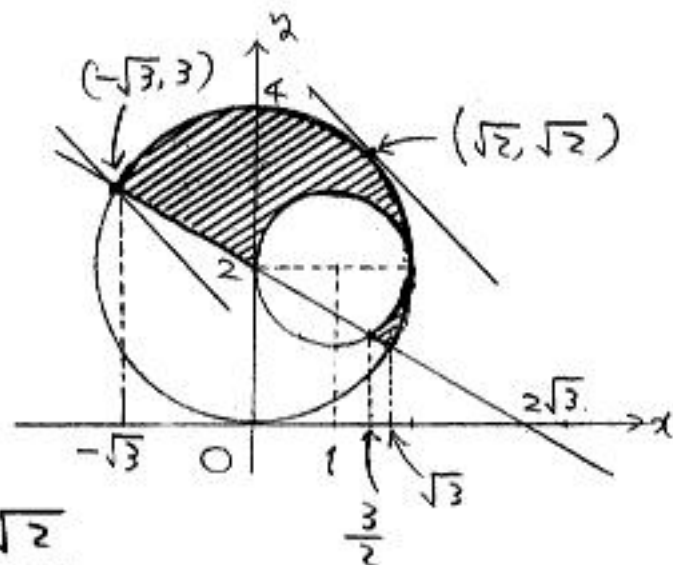
$$\begin{aligned} (1) \quad & 4y \geq x^2 + y^2 \geq 2x + 4y - 4 \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 \leq 4y \Leftrightarrow x^2 + (y-2)^2 \leq 4 \\ x^2 + y^2 \geq 2x + 4y - 4 \\ \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-2)^2 \geq 1 \end{cases} \\ & 3y + \sqrt{3}x \geq 6 \Leftrightarrow y \geq -\frac{x}{\sqrt{3}} + 2 \end{aligned}$$

領域Dは右図の斜線部となる。

(2) $x+y=l$ とき、傾き -1 の

平行直線群 $y = -x + l$ と領域D
との交点条件を考えると;

$$\begin{cases} x^2 + (y-2)^2 = 4 \text{ に } (\sqrt{2}, 2+\sqrt{2}) \\ \text{が接するとき } l \text{ は最大} \\ \Rightarrow x+y \text{ の最大値} = \underline{2+2\sqrt{2}} \\ \text{点 } (-\sqrt{3}, 3) \text{ を通るときに最小} \\ \Rightarrow x+y \text{ の最小値} = \underline{3-\sqrt{3}} \end{cases}$$



2

$$(1) \quad \frac{1}{2 - \sqrt[3]{7}} = \frac{2^2 + 2 \times \sqrt[3]{7} + (\sqrt[3]{7})^2}{2^3 - (\sqrt[3]{7})^3} = 4 + 2 \times \sqrt[3]{7} + \sqrt[3]{49}$$

と有理化すると $3a z^n$, $p=4$, $q=2$, $r=1$ である。

$$(2) \quad \frac{1}{\sqrt[3]{9} - 2} = \frac{(\sqrt[3]{9})^2 + \sqrt[3]{9} \times 2 + 2^2}{(\sqrt[3]{9})^3 - 2^3} = 4 + 2 \times \sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{81} > 2a z^n,$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{9} - 2} - \frac{1}{2 - \sqrt[3]{7}} = 2(\sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{7}) + \sqrt[3]{81} - \sqrt[3]{49} > 0$$

とわかる。 $\frac{1}{\sqrt[3]{9} - 2} > \frac{1}{2 - \sqrt[3]{7}} \iff \sqrt[3]{9} - 2 < 2 - \sqrt[3]{7}$ である。

よって、 $\sqrt[3]{9}$ が $\sqrt[3]{7}$ よりも 2 に近い ことがわかる。

3

- (1) 1回目終了時には表が7枚と裏が6枚の状態となっていて、表の7枚から1枚と裏の6枚から $(6-k)$ 枚を選んで裏返し直したとき、表を向いているコインの枚数は $(7-k) + (6-k) = 13 - 2k$ となる。 $13 - 2k \geq 5 \Leftrightarrow k \leq 4$ なので、 $k=5$ と $k=6$ のときのみ余事象として扱われる。

$$1 - \frac{{}_7C_5 \times 6C_0 + {}_7C_6 \times 6C_0}{13C_6} = 1 - \frac{133}{13 \times 12 \times 11} = 1 - \frac{133}{1716} = \frac{1583}{1716}$$

- (2) n に関する数学的帰納法を示す。 $n=1$ のときは、表向きのコインは7枚(奇数)である。 n 回目終了の時点で表を向いているコインの枚数を H_n とする。この H_n 枚の中から k 枚を $(n+1)$ 回目の操作で裏返すとするとき、 $(13 - H_n)$ 枚の裏返し状態のコインから $(6-k)$ 枚を選んで表向きに直すことになるので、 $(n+1)$ 回目終了時に表を向いているコインの枚数は、

$$(H_n - k) + (6 - k) = H_n - 2k + 6$$

となる。 H_n が奇数と仮定されているので、これも奇数である。

よって、任意の n について題意が示された。

4

- (1) $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b = 0$ a 2 解 α, β 2 2 あり, $x = \alpha$ 2 2 極大 α 2 2 あり, $x = \beta$ 2 2 極小 β 2 2 あり.
 2 2 あり。解 2 2 係数 a 2 2 関係 2 2 あり。 $\alpha + \beta = -\frac{2}{3}a$, $\alpha\beta = \frac{b}{3}$ 2 2 あり。

$$\begin{aligned} f(\alpha) + f(\beta) &= \alpha^3 + \beta^3 + a(\alpha^2 + \beta^2) + b(\alpha + \beta) + 2c \\ &= (\alpha + \beta) \{ (\alpha + \beta)^2 - 3\alpha\beta \} \\ &\quad + a \{ (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta \} + b(\alpha + \beta) + 2c \\ &= -\frac{2}{3}a \left(\frac{4}{9}a^2 - b \right) + a \left(\frac{4}{9}a^2 - \frac{2}{3}b \right) - \frac{2}{3}ab + 2c \\ &= \frac{4}{27}a^3 - \frac{2}{3}ab + 2c \end{aligned}$$

(2) $\frac{\alpha + \beta}{2} = -\frac{a}{3}$ 2 2 あり, $f\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) = f\left(-\frac{a}{3}\right) = \frac{2}{27}a^3 - \frac{ab}{3} + c$ 2 2 あり。

これ 2 2 (1) 2 2 あり $f(\alpha) + f(\beta)$ 2 2 比べ 2 2 あり

$$\frac{f(\alpha) + f(\beta)}{2} = f\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)$$

2 2 あり。

- (3) $g(x) = x^3 + 3x^2 + x + d$, $g'(x) = 3x^2 + 6x + 1$ 2 2 あり (2 (1) 2 2 (2) 2 2 結果 2 2 用い 2 2 あり。極大 2 2 点 2 2 極小 2 2 点 a 2 2 和 2 2 あり d 2 2 あり,

$$\frac{g}{2} = g\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) = g\left(-\frac{2}{3}\right) = g(-1) = 1 + d$$

$$\Leftrightarrow \underline{d = 3}$$