

$\boxed{1}$ (1) $\sqrt{3} \sin x - \cos x - 1 = 2 \sin(x - \frac{\pi}{6}) - 1 = 0 \pm 0 < x < \pi$ とき、
 1つ、 $\sin(x - \frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2} \Rightarrow x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = \frac{\pi}{3}$ ときあり、 $0 < x < \frac{\pi}{3}$ とき、
 負、 $\frac{\pi}{3} < x < \pi$ とき正だから、 $F(x) = -\sqrt{3} \cos x - \sin x - x$ と書ける。

$$\int_0^{\pi} |\sqrt{3} \sin x - \cos x - 1| dx = -[F(x)]_0^{\frac{\pi}{3}} + [F(x)]_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}$$

$$= F(0) + F(\pi) - 2 \times F(\frac{\pi}{3})$$

$$= -\sqrt{3} + (\sqrt{3} - \pi) - 2(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{3})$$

$$= \underline{\underline{2\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}}}$$

(2) $f(x) = (2x^2 - 2x + 1)e^{-x^2}$ とおける。

$$f'(x) = \{4x - 2 + (2x^2 - 2x + 1)(-2x)\}e^{-x^2}$$

$$= -2(2x^3 - 2x^2 - x + 1)e^{-x^2}$$

$$= -2(x-1)(2x^2-1)e^{-x^2}$$
 である、 $f(x)$ の増減は次表となる。

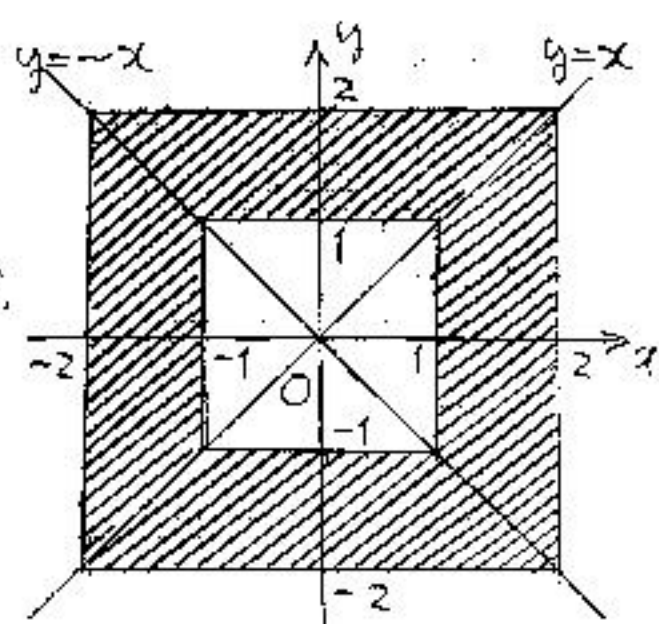
x	-----	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	-----	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	-----	1	-----
$f'(x)$	+	0	-	0	+		-
$f(x)$	$\nearrow$	$\frac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{e}}$	$\searrow$	$\frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{e}}$	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$

こゝで、 $y = f(x)$ と x 軸に平行な直線 $y = k$ と異なる3個の
 共有点をもつのは、極小点で接するときと2つの極大点の中、
 1つ y 座標 k と同じ、大きい方で接するときである。

$$\frac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{e}} = \frac{(2+\sqrt{2})\sqrt{e}}{e} > \frac{1}{e} \text{ は明らかだから、求める } k \text{ は}$$

$$\underline{\underline{\frac{2-\sqrt{2}}{e}, \frac{1}{e}}}$$

- ② (1) $|x| \geq |y|$ かつ $\|z\| = |x|$ なる z ,
 $1 \leq \|z\| \leq 2 \iff 1 \leq |x| \leq 2$
 $|x| < |y|$ かつ $1 \leq |y| \leq 2$ なる z .
 これを図示すれば右図となる。



(2) $\|z-3\| = \max\{|x-3|, |y|\}$,

$\|z-2i\| = \max\{|x|, |y-2|\}$ であり、

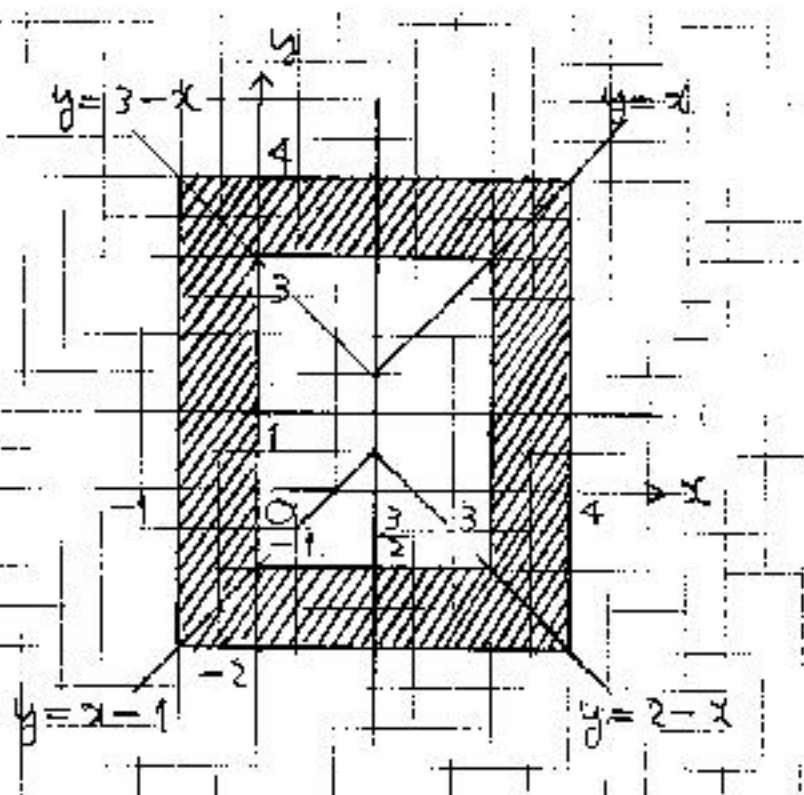
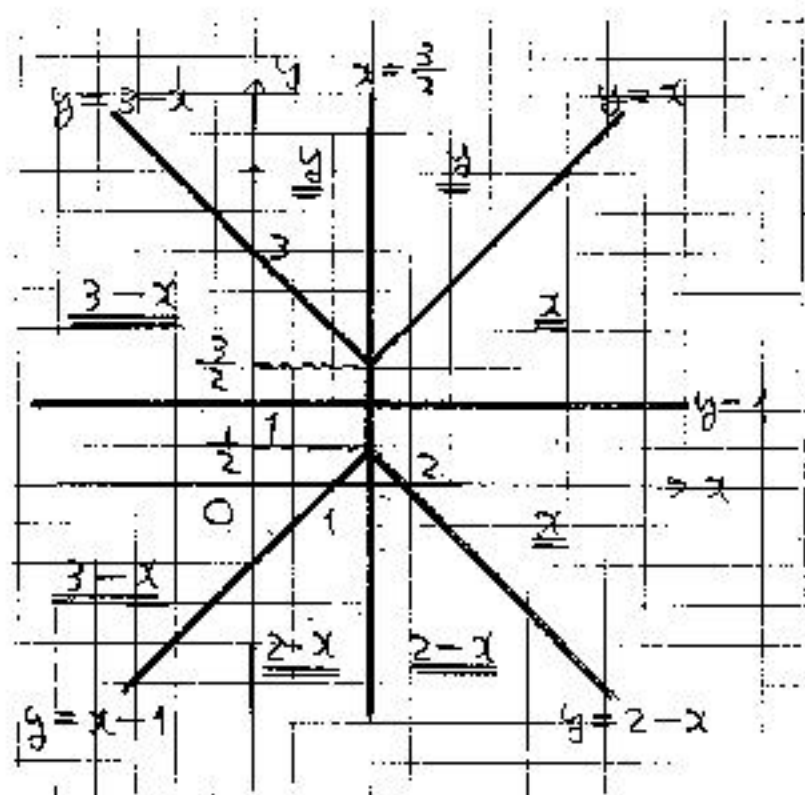
$\max\{\|z-3\|, \|z-2i\|\}$ は $|x-3|, |y|, |x|, |y-2|$ の中で最大
 のものを表わすことになるので、これは

$\max\{\max\{|x|, |x-3|\}, \max\{|y|, |y-2|\}\}$
 となる。

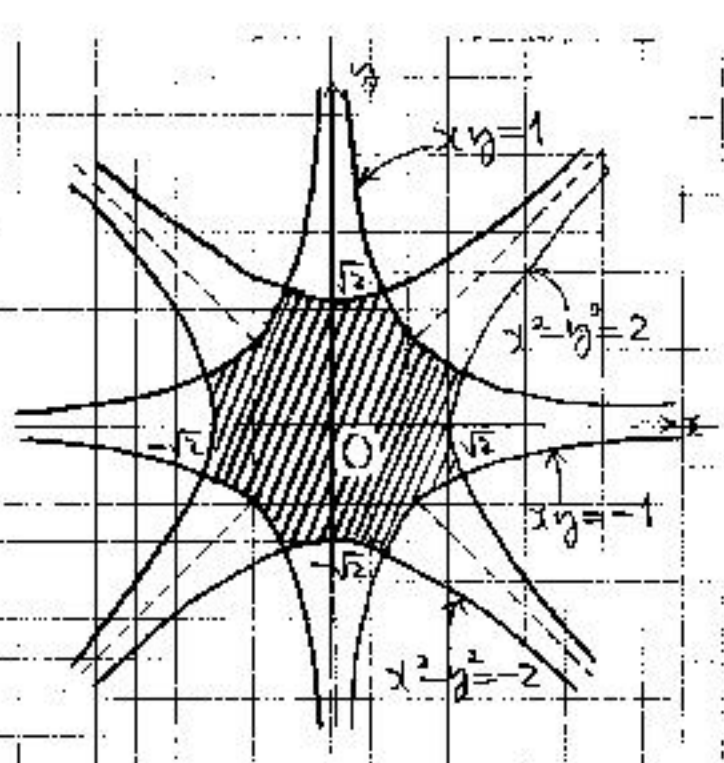
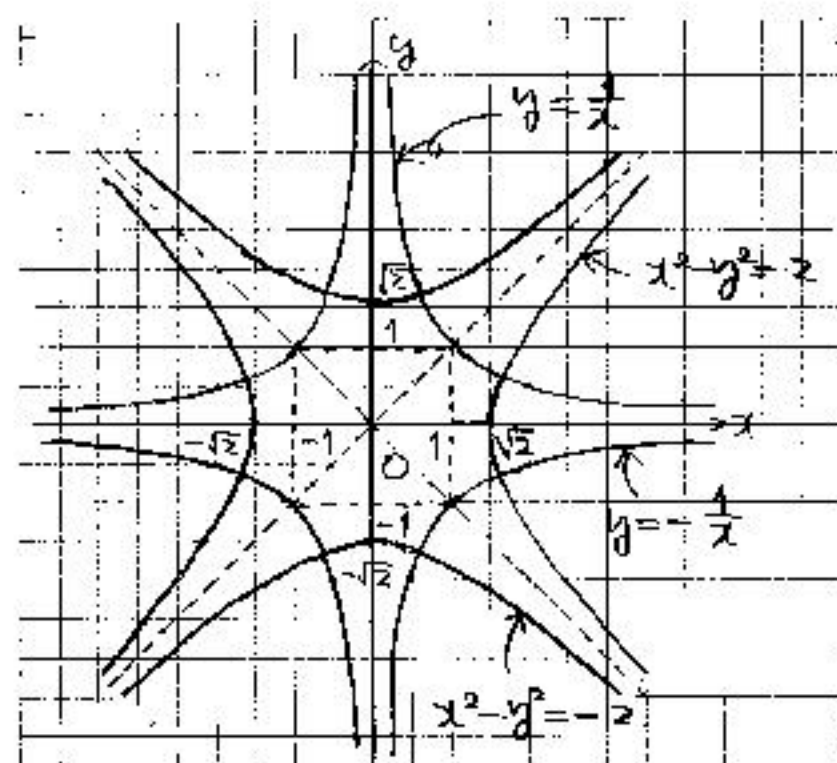
$$\begin{cases} \max\{|x|, |x-3|\} = \begin{cases} x & x \geq \frac{3}{2} \\ 3-x & x \leq \frac{3}{2} \end{cases} \\ \max\{|y|, |y-2|\} = \begin{cases} y & y \geq 1 \\ 2-y & y \leq 1 \end{cases} \end{cases}$$

よって、 $\max\{\|z-3\|, \|z-2i\|\}$ の値を場合分けして表したのが下の左図
 である。右図により xy 平面は 8 個の部分に分割され、それぞれが領域
 におけるこの値を 2 重下線を付して記入してある。

これより 3 以上 4 以下の条件を満たす領域を求めることができる。
 下の右図に描いた斜線部分となる。

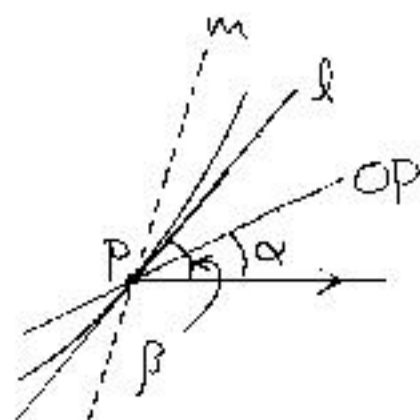


- (3) $z^2 = X + Yi = (x^2 - y^2) + 2xyi$ と書き、 $\|z\| \leq 2$ を XY 平面上
 に描けば 4 点 $(\pm 2, \pm 2)$ を結ぶ正方形の周知内部となる。
 この領域の境界である $X = \pm 2, Y = \pm 2$ を x, y で表せば
 $x^2 - y^2 = \pm 2, xy = \pm 1$
 となり、これを xy 平面上に描き、 (x, y) と (x, Y) が対応により、
 原点が原点に移る。求める領域は右図の斜線部となる。



- ③ (1) $P(t, t^2)$ ($t > 0$) をとる。OP の傾きは t であり、 P における接線 l の傾きは $2t$ であり、これを $\tan \alpha$, $\tan \beta$ と表せば、

$$\begin{aligned}\tan \theta &= \tan(\beta - \alpha) = \frac{\tan \beta - \tan \alpha}{1 + \tan \beta \tan \alpha} \\ &= \frac{2t - t}{1 + 2t \times t} = \frac{t}{1 + 2t^2}\end{aligned}$$



- (2) 求める m の傾きは $\tan(\beta + \theta)$ であり、

$$\begin{aligned}\tan(\beta + \theta) &= \frac{\tan \beta + \tan \theta}{1 - \tan \beta \tan \theta} = \frac{2t + t/(1 + 2t^2)}{1 - 2t^2/(1 + 2t^2)} \\ &= \frac{2t(1 + 2t^2) + t}{(1 + 2t^2) - 2t^2} = 4t^3 + 3t\end{aligned}$$

と表す。よって、求める直線 m の方程式は、

$$\begin{aligned}y &= (4t^3 + 3t)(x - t) + t^2 \\ &= (4t^3 + 3t)x - 4t^4 - 2t^2\end{aligned}$$

- (3) $(\frac{6}{7}, 0) \in (2)$ の直線に代入すれば、

$$6(4t^3 + 3t) - 7(4t^4 + 2t^2) = 0 \quad (t > 0)$$

$$\begin{aligned}\Leftrightarrow 24t^3 + 18 - 28t^4 - 14t^2 \\ &= -2(14t^4 - 12t^3 + 7t^2 - 9) \\ &= -2(t - 1)(14t^3 + 2t^2 + 9) = 0\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow t = 1 \quad (14t^3 + 2t^2 + 9 \text{ について } D/4 = 1 - 126 < 0)$$

よって、求める点 P は $(1, 1)$ である。