

$$\boxed{1} \quad (1) \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{4-6} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \text{ を用いれば}$$

$$AX=B \Rightarrow X=A^{-1}B = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & -5 \\ 3 & 11 \end{pmatrix} \\ = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -28+6 & 20+22 \\ 21-3 & -15-11 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} -11 & 21 \\ 9 & -13 \end{pmatrix}}}$$

$$(2) \quad (x^2+ay^2+b)(x+cy+d) \\ = x^3 + cx^2y + axy^2 + acy^3 + dx^2 + ady^2 + bx + bcy + bd \\ \text{と } x^3 + 3x^2y + xy^2 + 3y^3 - x^2 - y^2 - 3x - 9y + 3 \text{ の係数比較から、} \\ c=3, a=1, ac=3, d=-1, ad=-1, b=-3, bc=-9, bd=3 \\ \text{と } a \neq 2, \underline{a=1, b=-3, c=3, d=-1} \text{ となる。}$$

$$(3) \quad a, b, c \text{ が順に等比数列} \iff b^2=ac \text{ ----- ①}$$

$$c, a, b \text{ が順に等差数列} \iff 2a=b+c \text{ ----- ②}$$

$$a, b, c \text{ が和が } 6 \iff a+b+c=6 \text{ ----- ③}$$

$$\text{②, ③ より, } b+c=2a=6-a \Rightarrow a=2 \text{ となる。}$$

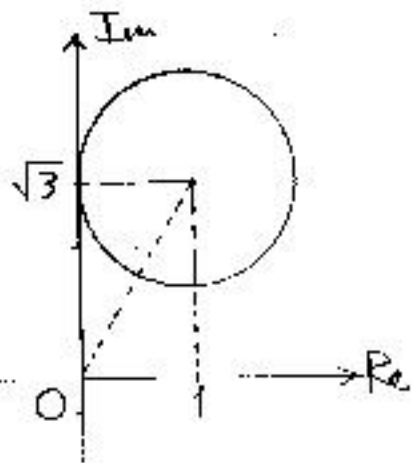
$$\text{① に } a=2 \text{ を代入すると } b^2=2c \text{ と } a \neq b \text{ となる。}$$

$$4=b+\frac{b^2}{2} \iff b^2+2b-8=(b+4)(b-2)=0$$

$$\therefore b=-4 \text{ となる。 } b=2 \text{ と } a=2 \text{ は } a=b \text{ となるので、}$$

$$\underline{a=2, b=-4, c=8}$$

- [2] (1) $|z_1 - 1 - \sqrt{3}i| = |z_1 - (1 + \sqrt{3}i)| = 1$ は点 z_1 と点 $1 + \sqrt{3}i$ との距離が 1 であること, すなわち, 点 z_1 が点 $1 + \sqrt{3}i$ を中心に半径が 1 の円周上にあることを表す。その概形は右図の円周となる。



$$z_2 = \frac{1}{4}(-1 + \sqrt{3}i)z_1 - 1 + 3\sqrt{3}i = \frac{1}{2}\left(\frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}\right)z_1 - 1 + 3\sqrt{3}i$$

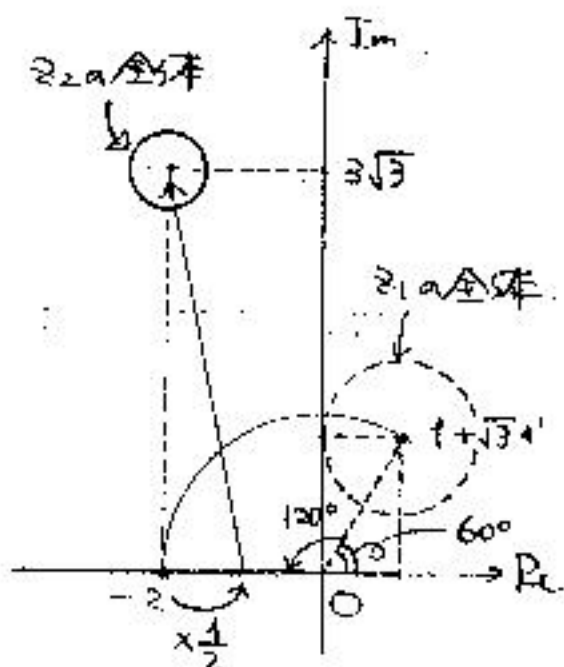
$$= \frac{1}{2}(\cos 120^\circ + i \sin 120^\circ)z_1 - 1 + 3\sqrt{3}i$$

は, z_1 を原点 o を中心に 120° 回転し, 原点 o を中心に $\frac{1}{2}$ 倍の縮小をしてから実軸方向に -1 と虚軸方向に $3\sqrt{3}$ ずつ平行移動した点 z_2 であることを表すので, 前半を求めた z_1 の全体を作る円の中心に注目して作図すればよい。

$$1 + \sqrt{3}i \rightarrow \frac{1}{2} \cdot \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} \cdot (1 + \sqrt{3}i) = -1$$

$$\rightarrow -1 + (-1 + 3\sqrt{3}i) = -2 + 3\sqrt{3}i$$

すなわち z_2 の作る円周の中心であり, 半径は $\frac{1}{2}$ である。



$$(2) \quad z_{n+1} - \alpha = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{4}(z_n - \alpha)$$

と変形すると,

$$\alpha - \frac{-1 + \sqrt{3}i}{4}\alpha = \frac{5 - \sqrt{3}i}{4}\alpha = -1 + 3\sqrt{3}i$$

$$\Leftrightarrow \alpha = \frac{4(-1 + 3\sqrt{3}i)}{5 - \sqrt{3}i} = \frac{4(-1 + 3\sqrt{3}i)(5 + \sqrt{3}i)}{25 + 3}$$

$$= \frac{-5 - 9 + (-\sqrt{3} + 15\sqrt{3})i}{7} = -2 + 2\sqrt{3}i$$

よって,

$$z_{n+1} - (-2 + 2\sqrt{3}i) = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{4} \{ z_n - (-2 + 2\sqrt{3}i) \}$$

$$\Rightarrow z_n = -2 + 2\sqrt{3}i + (z_1 + 2 - 2\sqrt{3}i) \left(\frac{-1 + \sqrt{3}i}{4} \right)^{n-1}$$

3

$f(x) = 2^{a-1}(x^a + 2^a) - (x+2)^a$ とおいて, $x > 0$ における最小値を考えると, a の最小値 $x=0$ 以上となる a の条件を調べる。

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2^{a-1} \times a x^{a-1} - a(x+2)^{a-1} \\ &= a \{ 2^{a-1} x^{a-1} - (x+2)^{a-1} \} \\ &= a \{ (x+x)^{a-1} - (x+2)^{a-1} \} \end{aligned}$$

ここで, x^{a-1} は $0 < a < 1$ のとき単調減少, $a=1$ のとき定数, $a > 1$ のときは単調増加であるから, $f'(2)=0$ とおくと;

(i) $0 < a < 1$ のとき

$f'(x)$ は $x=2$ の前後で a の符号が変化する, 変化は正から負となるから $f(x)$ は $x=2$ で極大かつ最大となる。また, $f(2) = 2^{a-1} \times 2^{a+1} - 2^{2a} = 0$ となる。注意 $a > 0$ のとき $f(x) \geq 0$ の成立は不可能である。

(ii) $a=1$ のとき

$f'(x) = 0$ となるから $f(x) \equiv f(2) = 0$ であり, 注意 $a > 0$ のとき $f(x) \geq 0$ である。

(iii) $a > 1$ のとき

$f'(x)$ は $x=2$ の前後で a の符号が変化する, 変化は負から正となるから $f(x)$ は $x=2$ で極小かつ最小となる。また, $f(2) = 0$ となる。注意 $a > 0$ のとき $f(x) \geq 0$ である。

以上より, 求める a の範囲は $\underline{a \geq 1}$ である。

$$\boxed{4} \quad (1) \quad 1 + \tan^2 \frac{x}{2} = 1 / \cos^2 \frac{x}{2} \Leftrightarrow \cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1}{1+t^2} \Rightarrow \text{さあ} z'',$$

$$\begin{cases} \sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = 2 \tan \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2} = \frac{2t}{1+t^2} \\ \cos x = 2 \cos^2 \frac{x}{2} - 1 = \frac{2}{1+t^2} - 1 = \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{cases}$$

$$(2) \quad \tan \frac{x}{2} = t \text{ の両辺に } t \text{ を微分できる.}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\tan \frac{x}{2} \right) &= \frac{d}{dx} \left(\tan \frac{x}{2} \right) \times \frac{dx}{dt} \\ &= \frac{\frac{1}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2}} \times \frac{dx}{dt} = \frac{1}{2} (1 + \tan^2 \frac{x}{2}) \times \frac{dx}{dt} \\ &= \frac{1+t^2}{2} \times \frac{dx}{dt} = 1 \Leftrightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{2}{1+t^2} \end{aligned}$$

$$(3) \quad 3 \sin x + 4 \cos x = \frac{6t + 4(1-t^2)}{1+t^2} \quad (\because (1))$$

$$\Rightarrow \int \frac{5}{3 \sin x + 4 \cos x} dx = \int \frac{5(1+t^2)}{-2(2t^2-3t-2)} \times \frac{2}{1+t^2} dt$$

$$= \int \frac{-5}{(2t+1)(t-2)} dt$$

$$\text{さあ}, \quad \frac{-5}{(2t+1)(t-2)} = \frac{2}{2t+1} - \frac{1}{t-2} \Rightarrow \text{さあ} z'', \text{上} \text{の } z' \text{ に}$$

$$= \int \left(\frac{2}{2t+1} - \frac{1}{t-2} \right) dt$$

$$= \log |2t+1| - \log |t-2| + C = \log \left| \frac{2t+1}{t-2} \right| + C$$

$$\text{さう}, \quad \frac{2t+1}{t-2} = \left(\frac{2t+1}{1+t^2} \right) / \left(\frac{t-2}{1+t^2} \right) \text{ と見れば}$$

$$\begin{cases} \frac{2t+1}{1+t^2} = \frac{2t}{1+t^2} + \frac{1}{1+t^2} = \sin x + \frac{\cos x + 1}{2} \\ \frac{t-2}{1+t^2} = \frac{t}{1+t^2} - \frac{2}{1+t^2} = \frac{\sin x}{2} - (\cos x + 1) \end{cases}$$

とさうさあ,

$$\frac{2t+1}{t-2} = \frac{2 \sin x + \cos x + 1}{\sin x - 2 \cos x - 2}$$

さう, 求める不定積分は

$$\log \left| \frac{2 \sin x + \cos x + 1}{\sin x - 2 \cos x - 2} \right| + C$$

$$\boxed{5} \quad (1) \quad I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \underline{\frac{\pi}{2}}, \quad I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = [\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \underline{1},$$

$$I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2x}{2} dx = \left[\frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \underline{\frac{\pi}{4}}$$

$$(2) \quad I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-1} x \times \cos x \times dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-1} x (\sin x)' dx$$

$$= \left[\cos^{n-1} x \sin x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (n-1) \cos^{n-2} x \sin^2 x dx$$

$$= (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-2} x (1 - \cos^2 x) dx = (n-1) (I_{n-2} - I_n)$$

$$\Leftrightarrow n \times I_n = (n-1) \times I_{n-2} \Leftrightarrow \underline{I_n = \frac{n-1}{n} \times I_{n-2}}$$

- 6 (1) $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d - (mx + n) = 0$ は4次方程式なので、
2接点 P, Q の x 座標 $0, \beta$ はそれぞれ2重解であり、左辺は
 $x^2(x-\beta)^2$ と因数分解される。
よって、 $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ と $x^2(x-\beta)^2 + mx + n$ の
係数比較することから

$$a = -2\beta, b = \beta^2, c = m, d = n$$

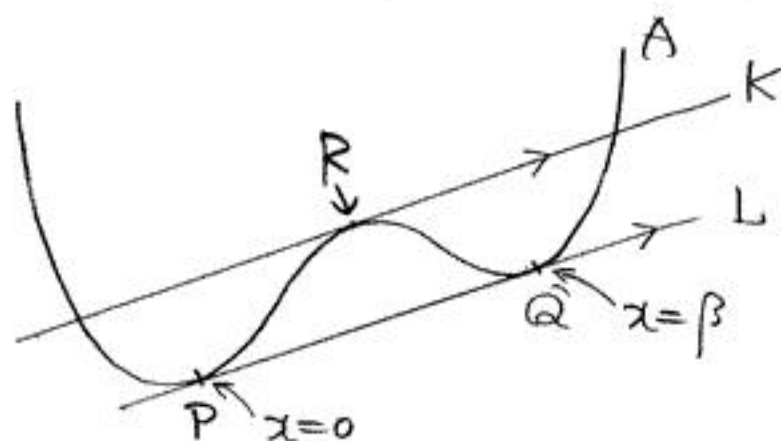
$$(2) \int_0^\beta x^2(x-\beta)^2 dx = \int_0^\beta (x^4 - 2\beta x^3 + \beta^2 x^2) dx \\ = \frac{\beta^5}{5} - \frac{\beta^5}{2} + \frac{\beta^5}{3} = \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right)\beta^5 = \frac{\beta^5}{30}$$

(注: 表に a などに用いる文字の指定は無いので、 a とする。)

- (3) 直線 K は右図の状況で

あり、 $y' = m$ と考えれば

$$4x^3 + 3ax^2 + 2bx + c \\ = 4x^3 - 6\beta x^2 + 2\beta^2 x + m \\ = m ; \text{よって}$$



$$4x^3 - 6\beta x^2 + 2\beta^2 x = 2x(2x^2 - 3\beta x + \beta^2) \\ = 2x(x-\beta)(2x-\beta) = 0 \iff x=0, x=\frac{\beta}{2}, x=\beta.$$

すなわち、任意の m の接線から引けるのは、 x 座標 m になる3つの
値である接点についてである。この中で $x=0$ と $x=\beta$ には P と Q
が該当するので、図中の接点 R の x 座標は $\frac{\beta}{2}$ である。

この R における接線は

$$y = m\left(x - \frac{\beta}{2}\right) + \frac{\beta^4}{16} - \frac{\beta^4}{4} + \frac{\beta^4}{4} + \frac{m}{2}\beta + n \\ = mx + \frac{\beta^4}{16} + n ; \text{よって}$$

$$x^4 - 2\beta x^3 + \beta^2 x^2 + mx + n = mx + \frac{\beta^4}{16} + n \\ \iff x^4 - 2\beta x^3 + \beta^2 x^2 - \frac{\beta^4}{16} = 0$$

これは明らかに $x = \frac{\beta}{2}$ は2重解をもつので、左辺は

$$\left(x - \frac{\beta}{2}\right)\left(x^3 - \frac{3}{2}\beta x^2 + \frac{\beta}{4}x + \frac{\beta^3}{8}\right) \\ = \left(x - \frac{\beta}{2}\right)^2\left(x^2 - \beta x - \frac{\beta^2}{4}\right) = \left(x - \frac{\beta}{2}\right)^2\left\{\left(x - \frac{\beta}{2}\right)^2 - \frac{\beta^2}{2}\right\}$$

と分解できるので、3つの共通点の x 座標は

$$\frac{1-\sqrt{2}}{2}\beta, \frac{\beta}{2} (\text{接点}), \frac{1+\sqrt{2}}{2}\beta$$