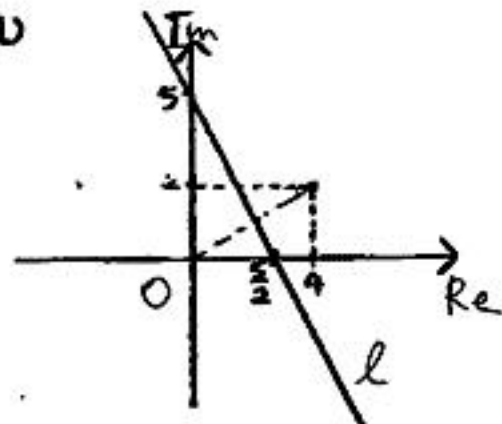


(1)

(2) l 上の複素数 z は、実数 a を使って、 $a + (-2a+5)i$ と表される。よって、

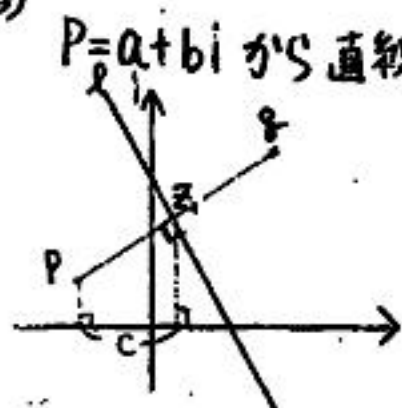
$$\begin{aligned}(2-i)z + (2+i)\bar{z} &= (2-i)(a + (-2a+5)i) + (2+i)(a - (-2a+5)i) \\ &= 5 + (10-5a)i + 5 - (10-5a)i \\ &= 10\end{aligned}$$

答 10(3) $P = a+bi$ が l 直線 l におろした垂線の足を z_1 とすると、
実数 c をつかって、

$$P = z_1 + (c + \frac{c}{2}i) \text{ と表すことが出来る。}$$

このとき

$$Q = z_1 - (c + \frac{c}{2}i) \text{ である。}$$



よって、

$$\begin{aligned}(2-i)P + (2+i)Q &= (2-i)(z_1 + (c + \frac{c}{2}i)) + (2+i)(z_1 - (c + \frac{c}{2}i)) \\ &= (2-i)z_1 + (2+i)\bar{z}_1 + (2-i)(c + \frac{c}{2}i) - (2+i)(c - \frac{c}{2}i)\end{aligned}$$

$$(2-i)z_1 + (2+i)\bar{z}_1 = 10$$

$$\text{又、} (2-i)(c + \frac{c}{2}i) - (2+i)(c - \frac{c}{2}i) = 0 \text{ かつ}$$

$$\begin{aligned}(2-i)P + (2+i)Q &= (2-i)z_1 + (2+i)\bar{z}_1 + (2-i)(c + \frac{c}{2}i) - (2+i)(c - \frac{c}{2}i) \\ &= 10 + 0 = \underline{10}\end{aligned}$$

(1) C: $y' = 2x + 2$ より、接線 l, m はそれぞれ

$$l: y = (2p+2)x - p^2 + 3 \quad m: y = (2r+2)x - r^2 + 3$$

となる。

$$\begin{aligned} S &= \int_p^8 (x^2 + 2x + 3 - ((2p+2)x - p^2 + 3)) dx \\ &= \int_p^8 (x-p)^2 dx \\ &= \left[\frac{1}{3} (x-p)^3 \right]_p^8 = \frac{1}{3} (8-p)^3 \end{aligned}$$

(2) S と同様にして、 T は

$$T = \int_8^r (x-r)^2 dx = \left[\frac{1}{3} (x-r)^3 \right]_8^r = -\frac{1}{3} (r-8)^3$$

よって $8S = T$ のとき、

$$\begin{aligned} \frac{8}{3} (8-p)^3 &= -\frac{1}{3} (r-8)^3 \Leftrightarrow 8(8-p)^3 = (r-8)^3 \\ &\Leftrightarrow 2(8-p) = r-8 \end{aligned}$$

$$\text{よって } r = 8 + 2(8-p) = 3 \cdot 8 - 2p$$

$$\text{答 } r = 3 \cdot 8 - 2p$$

(3) l, m の直線の式より、

$$L: (8, 2p \cdot 8 + 2 \cdot 8 - p^2 + 3) \quad M: (8, 2r \cdot 8 + 2 \cdot 8 - r^2 + 3)$$

$$\text{よって } QL = 8^2 + 2 \cdot 8 + 3 - (2p \cdot 8 + 2 \cdot 8 - p^2 + 3) = (8-p)^2$$

$$QM = 8^2 + 2 \cdot 8 + 3 - (2r \cdot 8 + 2 \cdot 8 - r^2 + 3) = (r-8)^2$$

ここで (2) の $r = 3 \cdot 8 - 2p$ を代入して

$$QM = (r-8)^2 = (2 \cdot 8 - 2p)^2 = 4(8-p)^2$$

よって

$$QL: QM = (8-p)^2: 4(8-p)^2 = 1: 4$$

$$\text{答 } QL: QM = 1: 4$$

3 (1)

$$S(t) = (t+1)^3 - t^3 - (t-1)^3 = -t^3 + 6t^2 + 2$$

とし、 $S(n) > 0$ を満たす最大の整数 n を求めよ。

$$S'(t) = -3t^2 + 12t$$

$$= -3t(t-4)$$

t	$\dots$	0	$\dots$	4	$\dots$
$S'(t)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$S(t)$	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$

より、増減表は右のようになる、

$S(t)$ は $t > 4$ で単調に減少し、

$S(6) = 2$, $S(7) = -47$ であるから、 $S(n) > 0$ を満たす最大の整数 n は、 6 ... (1/2)

(2) (1) の結果より、

$$7^3 > 6^3 + 5^3$$

これを両辺に 7^x をかけると、 $x > 0$ のとき、

$$\begin{aligned} 7^{x+3} &= 7^x \cdot 7^3 > 7^x (6^3 + 5^3) \\ &= 7^x \cdot 6^3 + 7^x \cdot 5^3 \\ &> 6^x \cdot 6^3 + 5^x \cdot 5^3 \\ &= 6^{x+3} + 5^{x+3} \end{aligned}$$

(証明終)

4

(1) 2回の試行で②, ④にあることはなから、
その確率はともに0。

①にある確率は、2回とも時計回りに動くから、
$$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$$

⑤にある確率は、2回とも反時計回りに動くから、
$$\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$$

③にある確率は、時計回りと反時計回りに
1回ずつ動くから、
$$2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$$

①から⑤までまとめて順番に書くと、
$$\left(\frac{1}{9}, 0, \frac{4}{9}, 0, \frac{4}{9} \right) \quad \dots (\text{答})$$

(2) 「2回の試行」を2回行うと考え、
(1)の結果を活用する。

②, ④にある確率はともに0。

①にある確率は、2回目でも①にあるときと③にある
ときの2通りがあり、
$$\frac{1}{9} + \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{9} = \frac{13}{81}$$

⑤にある確率は、2回目でも⑤にあるときと③にある
ときの2通りがあり
$$\frac{4}{9} + \frac{4}{9} \cdot \frac{4}{9} = \frac{52}{81}$$

③にある確率は、2回目でも③にあるときのみだから、
$$\frac{4}{9} \cdot \frac{4}{9} = \frac{16}{81}$$

①から⑤までまとめて順番に書くと、
$$\left(\frac{13}{81}, 0, \frac{16}{81}, 0, \frac{52}{81} \right) \quad \dots (\text{答})$$

(3) 2, 4, 6, ..., 2n 回目のすべてで③にあるから、
確率は、
$$\left(\frac{4}{9} \right)^n \quad \dots (\text{答})$$