

(1)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1-a & a \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1-a \end{pmatrix}$$

このとき

$$P^{-1} = \frac{1}{1(1-a)-1} \begin{pmatrix} 1-a & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{a} \begin{pmatrix} 1-a & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ である。}$$

よって

$$\begin{aligned} P^{-1}AP &= -\frac{1}{a} \begin{pmatrix} 1-a & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1-a & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1-a \end{pmatrix} \\ &= -\frac{1}{a} \begin{pmatrix} -a & 0 \\ 0 & -a^2-a \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a+1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \text{ となるので、}$$

$$a+1 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow a = -\frac{1}{2}$$

$$\underline{\underline{\text{答 } a = -\frac{1}{2}}}$$

(2)

$$(P^{-1}AP)^n = \underbrace{(P^{-1}AP)(P^{-1}AP) \cdots (P^{-1}AP)}_{n\text{個}} = P^{-1}A^nP$$

$$(P^{-1}AP)^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (\frac{1}{2})^n \end{pmatrix} \text{ より、}$$

$$P^{-1}A^nP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (\frac{1}{2})^n \end{pmatrix} \text{ となる。}$$

よって $a = -\frac{1}{2}$ を使って、

$$\begin{aligned} A^n &= P(P^{-1}A^nP)P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (\frac{1}{2})^n \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 - \frac{1}{2^{n+1}} & -2 + \frac{1}{2^{n+1}} \\ 3 - \frac{3}{2^n} & -2 + \frac{3}{2^n} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

よって、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} 3 - \frac{1}{2^{n+1}} & -2 + \frac{1}{2^{n+1}} \\ 3 - \frac{3}{2^n} & -2 + \frac{3}{2^n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{\lim_{n \rightarrow \infty} A^n = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}}}$$

$$(1) \int \frac{(x-1)^2(3x-1)}{x^2} dx = \int \left(3x - 7 + \frac{5}{x} - \frac{1}{x^2} \right) dx$$
$$\underline{\underline{\text{答} = \frac{3}{2}x^2 - 7x + 5\log|x| + \frac{1}{x} + C}} \quad (C \text{ は積分定数})$$

$$(2) \int \frac{4x^3 - 6x + 9}{x^4 - 3x^2 + 9x + 10} dx = \underline{\underline{\text{答} \log|x^4 - 3x^2 + 9x + 10| + C}}$$

(C は積分定数)

(1) $y=2at \Leftrightarrow t=\frac{1}{2a}y$ と表せるので、これを $x=at^2$ に代入し、

$$x=at^2=a\left(\frac{y}{2a}\right)^2=\frac{1}{4a}y^2$$

$y \geq 0, t > 0$ より、 $a \geq 0, x \geq 0$ とする、 $\therefore y=2\sqrt{ax}$

答 $y=2\sqrt{ax}$

(2)

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2at \\ 2a \end{pmatrix} \quad \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a \\ 0 \end{pmatrix}$$

(3) 点Qの座標を $(at_1^2, 2at_1)$ と表すと、

Qでの速度ベクトルは $\begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2at_1 \\ 2a \end{pmatrix}$ より、 $\vec{BP} = \begin{pmatrix} at_1^2 - b \\ 2at_1 \end{pmatrix}$

よって、内積は

$$\begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{pmatrix} \cdot \vec{BP} = 2at_1(at_1^2 - b) + 2a \cdot 2at_1 = 2at_1(at_1^2 - b + 2a)$$

$a \neq 0$ とし、 $t_1 = \sqrt{\frac{b-2a}{a}}$ と表せる。

よって、Q: $(b-2a, 2\sqrt{ab-2a^2})$

答 Q: $(b-2a, 2\sqrt{ab-2a^2})$

BとQの距離は、

$$\sqrt{(b-2a-b)^2 + (2\sqrt{ab-2a^2})^2} = 2\sqrt{ab-a^2}$$

答 $2\sqrt{ab-a^2}$

(4) $b=6, a=1$ より、

Q: $(4, 4)$ B: $(6, 0)$ かつ、

$l: y = -2x + 12$

次にQにおけるCの接線の傾きは、

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{2a}{2at_1} = \frac{1}{t_1} = \sqrt{\frac{a}{b-2a}} = \frac{1}{2} \text{ より}$$

$k: y = \frac{1}{2}x - 2$

より、 l と k の交点は、

$$-2x + 12 = \frac{1}{2}x - 2 \Leftrightarrow x = \frac{28}{5}$$

$\left(\frac{28}{5}, \frac{4}{5}\right)$

(1) 全てが不良品に不良率1%

$$\left(\frac{20}{100}\right)^3 = \frac{1}{125} \text{ より}$$

$$1 - \frac{1}{125} = \frac{124}{125}$$

(2)

$$\frac{100-x}{100} \times \frac{x}{100} \times 2 \leq \frac{48}{100}$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 100x + 2400 = (x-40)(x-60) \geq 0$$

よって $0 \leq x \leq 40$ または $60 \leq x \leq 100$

答 $0 \leq x \leq 40$ $60 \leq x \leq 100$

(3) 不良品がYのとき

$$\frac{10}{100} \times \frac{90}{100} \times 2 \times \left(\frac{80}{100}\right)^2 = \frac{72}{625}$$

良品がZのとき

$$\left(\frac{90}{100}\right)^2 \times \frac{20}{100} \times \frac{80}{100} \times 2 = \frac{162}{625}$$

よって

$$\frac{72}{625} + \frac{162}{625} = \frac{234}{625}$$

答 $\frac{234}{625}$

(4)

$$\frac{{}^7C_3}{{}^{12}C_3} = \frac{35}{220} = \frac{7}{44}$$

答 $\frac{7}{44}$

(1) (i) $x^2 \geq 1, y \geq -2$ のとき

$$x^2 - 1 + y + 2 \leq 1 \Leftrightarrow y \leq -x^2$$

(ii) $x^2 \geq 1, y < -2$ のとき

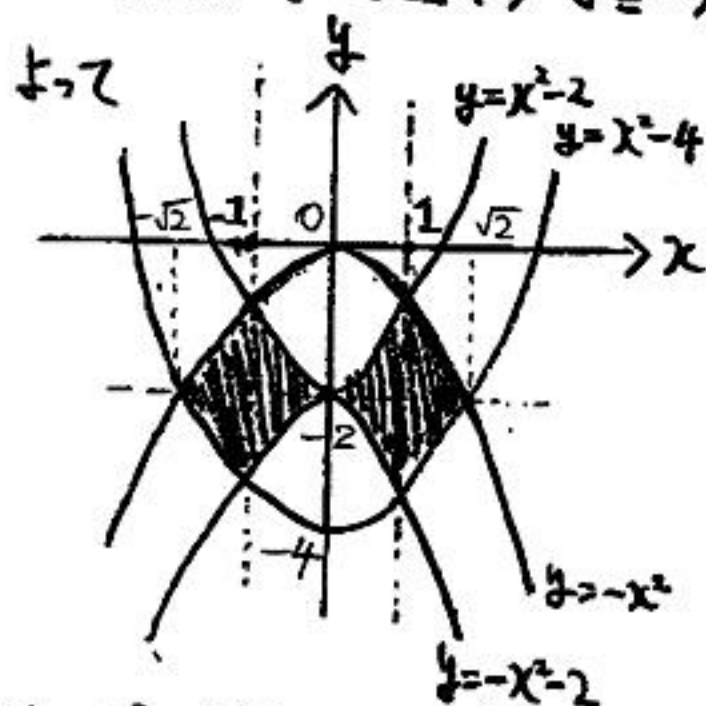
$$x^2 - 1 - y - 2 \leq 1 \Leftrightarrow y \geq x^2 - 4$$

(iii) $x^2 < 1, y \geq -2$ のとき

$$-x^2 + 1 + y + 2 \leq 1 \Leftrightarrow y \leq x^2 - 2$$

(iv) $x^2 < 1, y < -2$ のとき

$$-x^2 + 1 - y - 2 \leq 1 \Leftrightarrow y \geq -x^2 - 2$$



Dの領域は
左図斜線部
境界は含む

(2) 領域 D の面積 S は,

$$S = 2 \left(\int_0^1 (x^2 - 2 - (-x^2 - 2)) dx + \int_1^{\sqrt{2}} (-x^2 - (x^2 - 4)) dx \right)$$

$$= 2 \left(\left[\frac{2}{3} x^3 \right]_0^1 + \left[-\frac{2}{3} x^3 + 4x \right]_1^{\sqrt{2}} \right)$$

$$= 2 \left(\frac{2}{3} + \frac{2}{3} \sqrt{2} - \frac{10}{3} \right)$$

$$= \frac{16}{3} (\sqrt{2} - 1)$$

$$\text{答 } \frac{16}{3} (\sqrt{2} - 1)$$

(1) $n=0$ のとき

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} (a+b\cos x) dx &= [ax + b\sin x]_{-\pi}^{\pi} \\ &= a\pi - (-a\pi) \\ &= 2a\pi \\ &\quad \underline{\text{答 } 2a\pi}\end{aligned}$$

(2) $n=1$ のとき

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} (a+b\cos x)\cos x dx &= \int_{-\pi}^{\pi} a\cos x + b\cos^2 x dx \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} a\cos x + b\left(\frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{2}\right) dx \\ &= \left[a\sin x + \frac{b}{4}\sin 2x + \frac{1}{2}bx\right]_{-\pi}^{\pi} \\ &= \frac{1}{2}b\pi - \left(-\frac{1}{2}b\pi\right) = b\pi \\ &\quad \underline{\text{答 } b\pi}\end{aligned}$$

(3) n が "2以上の整数" のとき

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} (a+b\cos x)\cos(nx) dx &= \int_{-\pi}^{\pi} a\cos(nx) + b\cos x\cos nx dx \\ &= \left[\frac{a}{n}\sin(nx)\right]_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} b\cos x\cos nx dx \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} b\cos x\cos nx dx\end{aligned}$$

ここで、

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} b\cos x\cos nx dx &= [b\sin x\cos nx]_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} nb\sin x\sin nx dx \\ &= 0 + [-nb\cos x\sin nx]_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} n^2b\cos x\cos nx dx \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} n^2b\cos x\cos nx dx \\ &= n^2 \int_{-\pi}^{\pi} b\cos x\cos nx dx\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow (n^2-1) \int_{-\pi}^{\pi} b\cos x\cos nx dx = 0$$

n が "2以上の整数" のとき $n^2-1 \neq 0$ より $\int_{-\pi}^{\pi} b\cos x\cos nx dx = 0$

$$\text{よって } \int_{-\pi}^{\pi} (a+b\cos x)\cos nx dx = \int_{-\pi}^{\pi} b\cos x\cos nx dx = \underline{\underline{0}}$$

(別解) $\cos(n+1)x + \cos(n-1)x = 2\cos nx \cos x$
を用いてもよい。