

$$(1) \quad \frac{1}{3}A = \frac{7}{2} \quad B = \frac{17}{4} \quad C = \frac{14}{3} \quad \alpha = \frac{1}{2} \quad \beta = \frac{2}{3}$$

$$(2) \quad E_3 = \frac{14}{3} \text{ となる.}$$

$$E_4 = 5 \times \frac{1}{6} + 6 \times \frac{1}{6} + \frac{14}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{89}{18}$$

$$E_5 = 5 \times \frac{1}{6} + 6 \times \frac{1}{6} + \frac{89}{18} \times \frac{2}{3} = \frac{277}{54}$$

$$(3) \quad E_n > 6 \text{ となることはない.}$$

$$E_5 > 5 \text{ より, } n \geq 5 \text{ に対しては}$$

$$E_{n+1} = 6 \times \frac{1}{6} + E_n \times \frac{5}{6} \text{ が成立する.}$$

$$E_{n+1} - 6 = \frac{5}{6}(E_n - 6)$$

$$E_5 - 6 = -\frac{47}{54} \text{ より,}$$

$$E_n - 6 = -\frac{47}{54} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{n-5} \Leftrightarrow \underline{E_n = 6 - \frac{47}{54} \left(\frac{5}{6}\right)^{n-5}}$$

$$\text{又, } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{47}{54} \left(\frac{5}{6}\right)^{n-5} = 0 \text{ より,}$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} E_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} 6 - \frac{47}{54} \left(\frac{5}{6}\right)^{n-5} = 6 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{47}{54} \left(\frac{5}{6}\right)^{n-5} \\ &= 6 \end{aligned}$$

$$\underline{\lim_{n \rightarrow \infty} E_n = 6}$$

2

(1) 放物線 C の点 $(t, -\frac{1}{2}t^2)$ における接線は,
 $y = -t(x-t) - \frac{1}{2}t^2 = -tx + \frac{1}{2}t^2$
 と表され, 2本が $P(a, b)$ を通るとき,

$$t^2 - 2at - 2b = 0 \quad \dots \textcircled{1}$$

2本をみたす t が 2つ存在する条件を導けばよく,
 判別式を考えて,

$$a^2 + 2b > 0 \quad (\text{証明終})$$

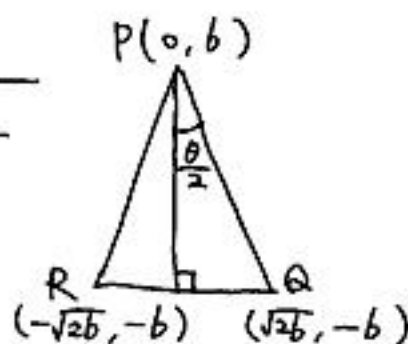
(2) C と 2本の接線の接点の x 座標は, ①より,
 $t^2 = 2b \quad \therefore t = \pm\sqrt{2b}$

図形は y 軸に関して対称.

$$\text{あり, } \cos \frac{\theta}{2} = \frac{2b}{\sqrt{4b^2 + 2b}} = \sqrt{\frac{2b}{2b+1}}$$

よって,

$$\begin{aligned} \cos \theta &= 2 \cos^2 \frac{\theta}{2} - 1 \\ &= \frac{2b-1}{2b+1} \quad \dots (\text{答}) \end{aligned}$$



(3) ①を解くと

$$t = a \pm \sqrt{a^2 + 2b}$$

であり, Q の x 座標を $a + \sqrt{a^2 + 2b}$,

R の x 座標を $a - \sqrt{a^2 + 2b}$ とし,

Q, R における接線と x 軸の
 なす角度をそれぞれ θ_1, θ_2 とすると,

$$\tan \theta_1 = -(a + \sqrt{a^2 + 2b}), \quad \tan \theta_2 = -(a - \sqrt{a^2 + 2b})$$

$\theta_1 - \theta_2 = \frac{\pi}{4}$ と仮定はよいから,

$$\begin{aligned} 1 &= \tan \frac{\pi}{4} = \tan(\theta_1 - \theta_2) = \frac{-2\sqrt{a^2 + 2b}}{1 + a^2 - (a^2 + 2b)} \\ &= \frac{2\sqrt{a^2 + 2b}}{2b - 1} \end{aligned}$$

$$\iff 4(a^2 + 2b) = (2b - 1)^2 \quad (b > \frac{1}{2})$$

$$\iff a^2 - (b - \frac{3}{2})^2 = -2 \quad (b > \frac{1}{2})$$

よって, 双曲線

$$x^2 - (y - \frac{3}{2})^2 = -2$$

の上半分を図示すればよく,

右図の赤線部になる。

