

数 学

(理学部 数学科)

(平成17年度)

問題冊子 1～2 ページ

答案用紙 3 枚

注 意 事 項

1. 試験開始の合図があるまでこの冊子を開いてはいけない。
2. 枚数の不足や、印刷に不鮮明なところがあれば申し出ること。
3. 解答は必ず答案用紙の指定された箇所に記入すること。
4. 受験番号は、答案用紙1枚ごとに所定の欄2箇所に必ず記入すること。記入を忘れたり、あるいは誤った番号を記入した場合は失格となることがある。
5. 試験が終了したら、答案用紙を上から(その1)、(その2)、(その3)の順番に重ねて机上に置くこと。
6. 退室するときは、問題冊子を持ち帰ること。

1

(35点)

n を自然数とし、さいころを使った次のようなゲーム (G_n) を考える。

(G_n): さいころを 1 回は必ず振り、最高 n 回まで振ることができる。
最後に出た目を得点とする。

ゲーム (G_1) はさいころをちょうど 1 回振るゲームであるから、ゲーム (G_1) を行って得られる得点の期待値は $\boxed{A}$ である。ゲーム (G_n) ($n \geq 2$) については、得点の期待値を大きくするため、次のような戦略でゲームを行うことにする。

まず、ゲーム (G_2) では、1 回目に出た目が $\boxed{A}$ 以上ならばそこでやめ、 $\boxed{A}$ 未満ならばもう一度振る。この戦略にしたがってゲーム (G_2) を行って得られる得点の期待値は

$$4 \times \frac{1}{6} + 5 \times \frac{1}{6} + 6 \times \frac{1}{6} + \boxed{A} \times \boxed{\alpha} = \boxed{B}$$

である。次に、ゲーム (G_3) では、1 回目に出た目が $\boxed{B}$ 以上ならばそこでやめ、 $\boxed{B}$ 未満ならば 2 回目を振るが、その 2 回目以降の戦略はゲーム (G_2) の戦略にしたがう。つまり、2 回目に出た目が $\boxed{A}$ 以上ならばそこでやめ、 $\boxed{A}$ 未満ならば 3 回目を振る。この戦略にしたがってゲーム (G_3) を行って得られる得点の期待値は

$$5 \times \frac{1}{6} + 6 \times \frac{1}{6} + \boxed{B} \times \boxed{\beta} = \boxed{C}$$

である。

このように、ゲーム (G_k) の戦略が定まってい、その戦略にしたがってゲーム (G_k) を行って得られる得点の期待値が E_k であるとき、ゲーム (G_{k+1}) では、1 回目に出た目が E_k 以上ならばそこでやめ、 E_k 未満ならば 2 回目を振るが、その 2 回目以降の戦略はゲーム (G_k) の戦略にしたがう。

ゲーム (G_n) の戦略は以上のようにして帰納的に定まる。この戦略にしたがってゲーム (G_n) を行って得られる得点の期待値を E_n とする。次の問いに答えよ。

- (1) 上の文章の $\boxed{A}$, $\boxed{B}$, $\boxed{C}$, $\boxed{\alpha}$, $\boxed{\beta}$ にあてはまる数を求めよ。
- (2) E_4, E_5 を求めよ。
- (3) E_n ($n \geq 6$) を求め、さらに $\lim_{n \rightarrow \infty} E_n$ を求めよ。

2

(35点)

xy 平面上の放物線 $C: y = -\frac{1}{2}x^2$ を考える。次の問いに答えよ。

- (1) 点 $P(a, b)$ が C の異なる 2 本の接線の交点となるための条件は $a^2 + 2b > 0$ であることを示せ。
- (2) 点 $P(0, b)$ ($b > 0$) を通る C の異なる 2 本の接線の接点をそれぞれ Q, R とし、 $\angle QPR = \theta$ とおく ($0 < \theta < \pi$)。このとき、 $\cos \theta$ を b を用いて表せ。
- (3) 次の条件を満たす点 P の軌跡を xy 平面上に図示せよ。

条件： 点 P を通る C の異なる 2 本の接線が存在し、それぞれの接点を Q, R とおくと、 $\angle QPR = \frac{\pi}{4}$ である。

3

(30点)

e を自然対数の底とし、次のような関数を考える。

$$F(x) = \int_x^{2x} |t \log t - t| dt \quad \left(\frac{e}{2} \leq x \leq e \right)$$

次の問いに答えよ。ただし、 $0.6 < \log 2 < 0.7$ であることは用いてよい。

- (1) $F(x)$ の導関数 $F'(x)$ を求めよ。
- (2) $F(x)$ を最小にする x の値を求めよ。
- (3) $F(x)$ を最大にする x の値を求めよ。