

$$(1) 7^6 = 117649.$$

$$7^7 = 823543.$$

よ、7.

$$\begin{aligned} 10^5 &< 7^6 \\ \Leftrightarrow 10^{\frac{5}{6}} &< 7 \quad \cdots \textcircled{1} \end{aligned} \quad \because \left[\begin{array}{l} a > 0 \text{ とする. この時.} \\ Y = X^a (X \geq 0) \text{ は. 単} \\ \text{調増加関数である.} \end{array} \right]$$

また.

$$\begin{aligned} 7^7 &< 10^6 \\ \Leftrightarrow 7 &< 10^{\frac{6}{7}} \quad \cdots \textcircled{2} \end{aligned}$$

よ、7. ①②より

$$10^{\frac{5}{6}} < 7 < 10^{\frac{6}{7}} //$$

(2) (1)の結果より.

$$10^{\frac{5}{6}} < 7 < 10^{\frac{6}{7}}$$

$$\Leftrightarrow 10^{35} < 7^{42} < 10^{36}$$

したがって、7、7⁴²の桁数は.

36 桁 ----- 答

(3) n と $7n$ の桁数が等しいならば、 n の最高位の数字は 1 である.

以下では、これを証明する.:

n の桁数を m とする. 仮定より

$$\begin{cases} 10^{m-1} \leq n < 10^m & \cdots \textcircled{3} \\ 10^{m-1} \leq 7n < 10^m & \cdots \textcircled{4} \end{cases}$$

また、 n の最高位の数字を

$$a \quad (1 \leq a \leq 9)$$

とおく.

$2 \leq a$ と仮定する. この時、③より

$$a \cdot 7n \geq 14 \cdot 10^{m-1} > 10^m \quad \cdots \textcircled{5}$$

したがって、④と⑤は矛盾する. したがって、

$$a = 1$$

である. //

(4) (3)の結果より、7^l ($1 \leq l \leq 42$)のうち、桁数の等しい2つの自然数の組が、少なくとも6通りあることを証明すればよい.

(1)より

$$10^{\frac{5}{6}l} < 7^l < 10^{\frac{6}{7}l} \quad \cdots (*)$$

(*)より

(I) $l = 6k$ ($1 \leq k \leq 6$)の場合

$$10^{5k} < 7^{6k} < 10^{6k}$$

・ $5k$ は整数であること.

$$\cdot 0 < \frac{36}{7}k - 5k \leq \frac{6}{7} < 1$$

に注意すると、7^{6k} は (5k+1) 桁の整数になる.

(II) $l = 7k$ ($1 \leq k \leq 6$)の場合

$$10^{\frac{35}{7}k} < 7^{7k} < 10^{6k}$$

・ $6k$ は整数であること.

$$\cdot 0 < 6k - \frac{35}{6}k \leq 1$$

に注意すると、7^{7k} は $6k$ 桁の整数になる.

したがって、(I)(II)より

$$10^{5k} < 7^{6k} \leq 7^l \leq 7^{7k} < 10^{6k} \quad \cdots (**)$$

(**)は、(5k+1)桁以上 6k桁以下の整数(桁の差 k-1)のうちで、7^lの型の整数が:

$$7k - 6k + 1$$

$$= k + 1 \text{ [個]}$$

存在することと示す. したがって、

(**)を満たす 7^l型の整数のうちで少なくとも

$$(k+1) - (k-1)$$

$$= 2 \text{ [個]}$$

は、桁数が同じものが存在する.

以上より、題意は証明された. //

(2) 第 l 行目の灰色に塗られた左から k 番目の数は、

$$(2l-1)n - (l-1) + k$$

$$= (2n-1)l + (-n+1) + k$$

である。したがって、求める総和は、

$$\sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^n \{ (2n-1)l + (-n+1) + k \}$$

$$= \sum_{l=1}^n \left\{ n(2n-1)l + n(-n+1) + \frac{1}{2}n(n+1) \right\}$$

$$= \sum_{l=1}^n \left\{ n(2n-1)l + \frac{n}{2}(-n+3) \right\}$$

$$= n(2n-1) \cdot \frac{1}{2}n(n+1) + \frac{n}{2}(-n+3) \cdot n$$

$$= \underline{n^2(n^2+1)} \quad \dots\dots (\text{答})$$

(1) (2) の結果に、 $n=5$ を代入して

$$5^2 \cdot (5^2+1)$$

$$= \underline{650} \quad \dots\dots (\text{答})$$

$$(1) OA \cdot OB = 25$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{1^2 + 2^2} \cdot (-C) \sqrt{1^2 + 2^2} = 25 \quad \therefore C < 0$$

$$\Leftrightarrow \underline{C = -5} \quad \dots\dots (\text{答})$$

(2) $A(1, 2)$ と $B(-5, -10)$ をつねに通る円の方程式は、

$$\{(x+2)^2 + (y+4)^2 - 45\} + k(2x-y) = 0$$

と表せる。ただし、 k は実数とする。-----①

したがって、

$$\begin{cases} \{(x+2)^2 + (y+4)^2 - 45\} + k(2x-y) = 0 \\ x^2 + y^2 - 25 \end{cases}$$

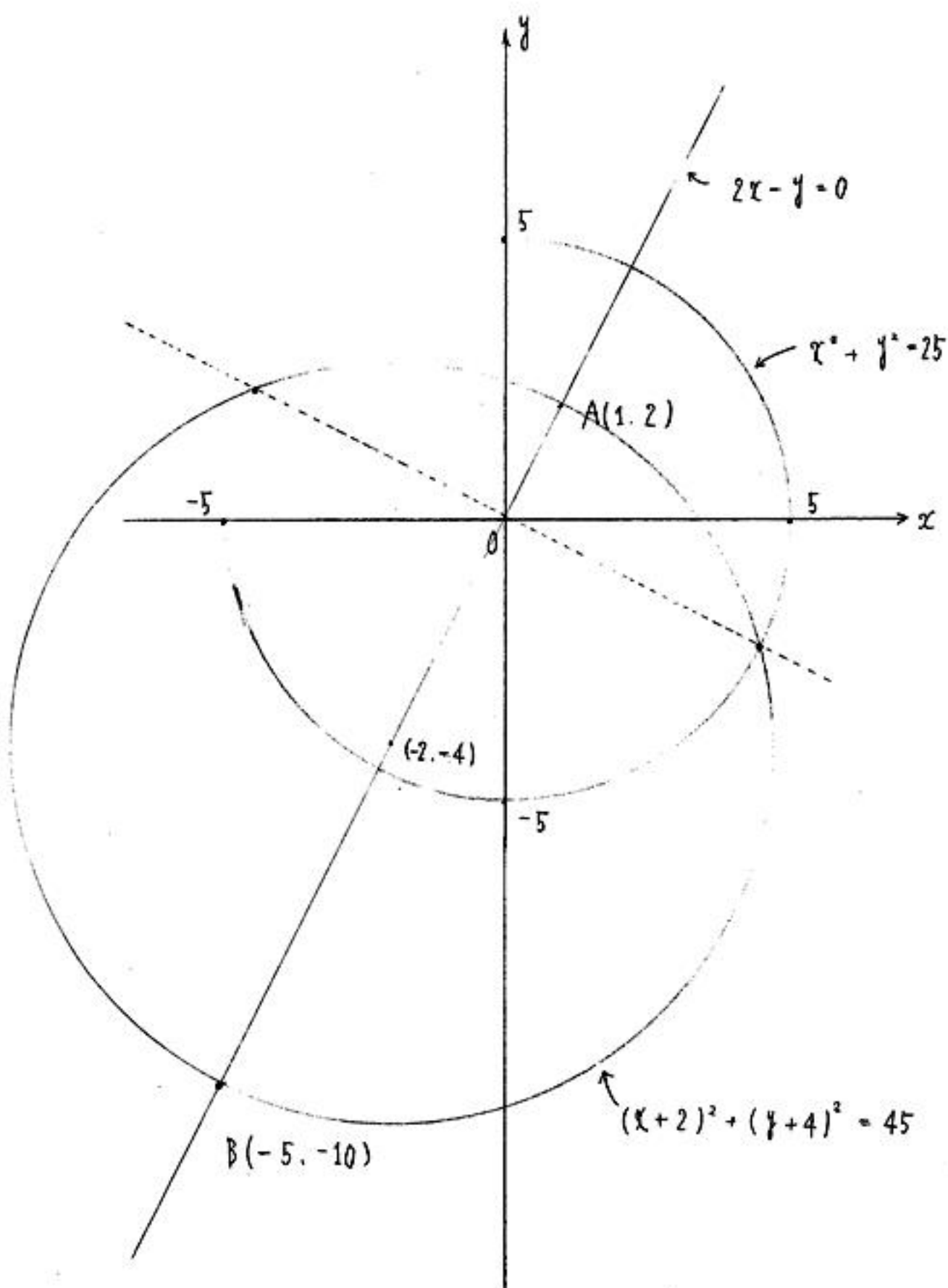
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4(x-2y) + k(2x-y) = 0 \\ x^2 + y^2 - 25 \end{cases} \quad \dots\dots ②$$

これは、①と②の交点を通る直線が、 k の値に関らず、

$$\begin{cases} 4(x-2y) = 0 \\ 2x-y \end{cases} \Leftrightarrow (x, y) = (0, 0)$$

を通ることと示している。よって、①

は、②の周を、つねに二等分する。//



(1) 仮定より

$$f'(x) = Ax(x + \frac{1}{3})$$

$$= A(x^2 + \frac{1}{3}x)$$

とおける。よ、

$$f(x) = \int f'(x) dx$$

$$= A \int (x^2 + \frac{1}{3}x) dx$$

$$= A(\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{6}x^2) + C \dots \textcircled{1}$$

(ただし、 C は積分定数)

再び、仮定より

$$\begin{cases} 3 = A(\frac{1}{3} \cdot 0^3 + \frac{1}{6} \cdot 0^2) + C \\ \frac{83}{27} = A\{\frac{1}{3}(-\frac{1}{3})^3 + \frac{1}{6}(-\frac{1}{3})^2\} + C \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (A, C) = (12, 3) \dots \textcircled{2}$$

よ、 $\textcircled{1}$ $\textcircled{2}$ より

$$y = 12(\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{6}x^2) + 3$$

$$= 4x^3 + 2x^2 + 3 \dots \text{--- (答)}$$

$$(2) f(\frac{1}{2}) = 4 \cdot (\frac{1}{2})^3 + 2(\frac{1}{2})^2 + 3 = 4,$$

$$f'(\frac{1}{2}) = 12 \cdot \frac{1}{2}(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}) = 5$$

よ、 $\textcircled{2}$ 求める接線の方程式は、

$$y - 4 = 5(x - \frac{1}{2})$$

$$\Leftrightarrow y = 5x + \frac{3}{2} \dots \text{--- (答)}$$

(3) B の座標を

$$(t, 4t^3 + 2t^2 + 3)$$

とおく。 B における接線の方程式は、

$$y - (4t^3 + 2t^2 + 3) = 12(t^2 + \frac{1}{3}t)(x - t)$$

これが $A(\frac{1}{2}, 4)$ を通るの、

$$4 - (4t^3 + 2t^2 + 3) = 12(t^2 + \frac{1}{3}t)(\frac{1}{2} - t)$$

$$\Leftrightarrow 8t^3 - 4t^2 - 2t + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (2t + 1)(2t - 1)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow t = -\frac{1}{2} \quad \because t \neq \frac{1}{2}$$

よ、 $\textcircled{2}$ 、

$$f(-\frac{1}{2}) = 4(-\frac{1}{2})^3 + 2(-\frac{1}{2})^2 + 3 = 3$$

より、求める B の座標は、

$$(-\frac{1}{2}, 3) \dots \text{--- (答)}$$