

1

$$(1) (\log \cos^2 x)'$$

$$= \frac{1}{\cos^2 x} \cdot 2 \cos x \cdot (-\sin x)$$

$$= -2 \tan x$$

よ、7.

$$\int -4 (\log \cos^2 x) \cdot \tan x \, dx$$

$$= \int 2 (\log \cos^2 x) \cdot (\log \cos^2 x)' \, dx$$

$$= \int ((\log \cos^2 x)^2)' \, dx$$

$$= \underline{(\log \cos^2 x)^2} + C \quad \dots\dots (\text{答})$$

ただし、Cは積分定数。

$$(2) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)e^{x-1} + x^2 + x - 2}{\sin(x-1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)e^{x-1} + (x-1)(x+2)}{\sin(x-1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sin(x-1)} (e^{x-1} + x+2)$$

$$= 1 \cdot (e^{1-1} + 1 + 2)$$

$$= \underline{4} \quad \dots\dots (\text{答})$$

2

$$|x^2 - 2x - 3|$$

$$= |(x+1)(x-3)|$$

$$= \begin{cases} x^2 - 2x - 3 & (x \leq -1 \text{ 或 } 3 \leq x \text{ の場合}) \\ -x^2 + 2x + 3 & (-1 < x < 3 \text{ の場合}) \end{cases}$$

さて、

「 x の方程式 :

$$|x^2 - 2x - 3| = 2x + k$$

には、3個以上の実数解が存在する。」

$\Leftrightarrow$ 「 x の方程式 :

$$|x^2 - 2x - 3| - 2x = k$$

には、3個以上の実数解が存在する。」

$\Leftrightarrow$ 「関数 : $y = |x^2 - 2x - 3| - 2x$

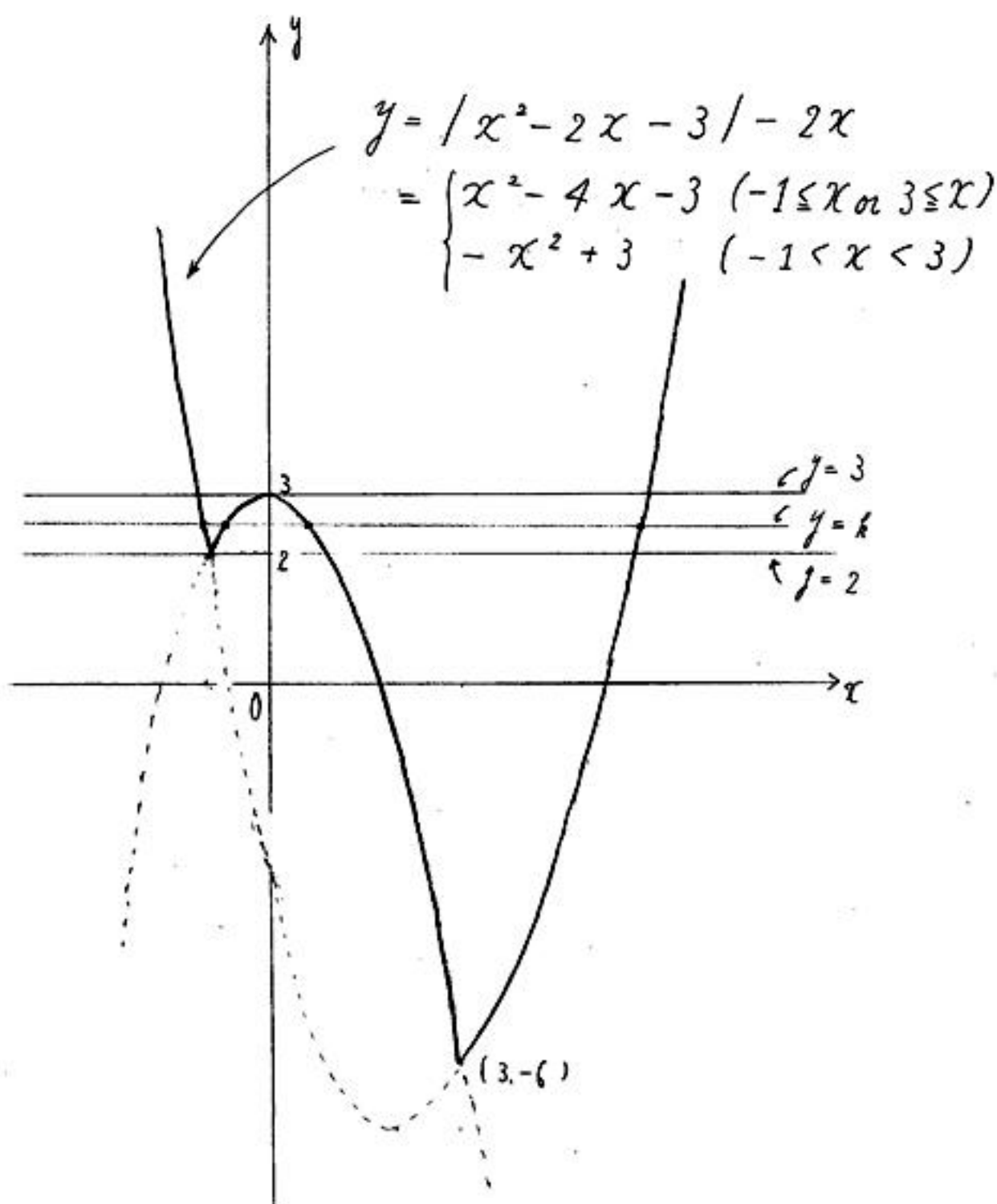
と

関数 : $y = k$

のグラフの交点は、3個以上存在し、かつ、それらの交点の x 座標はすべて異なる。」

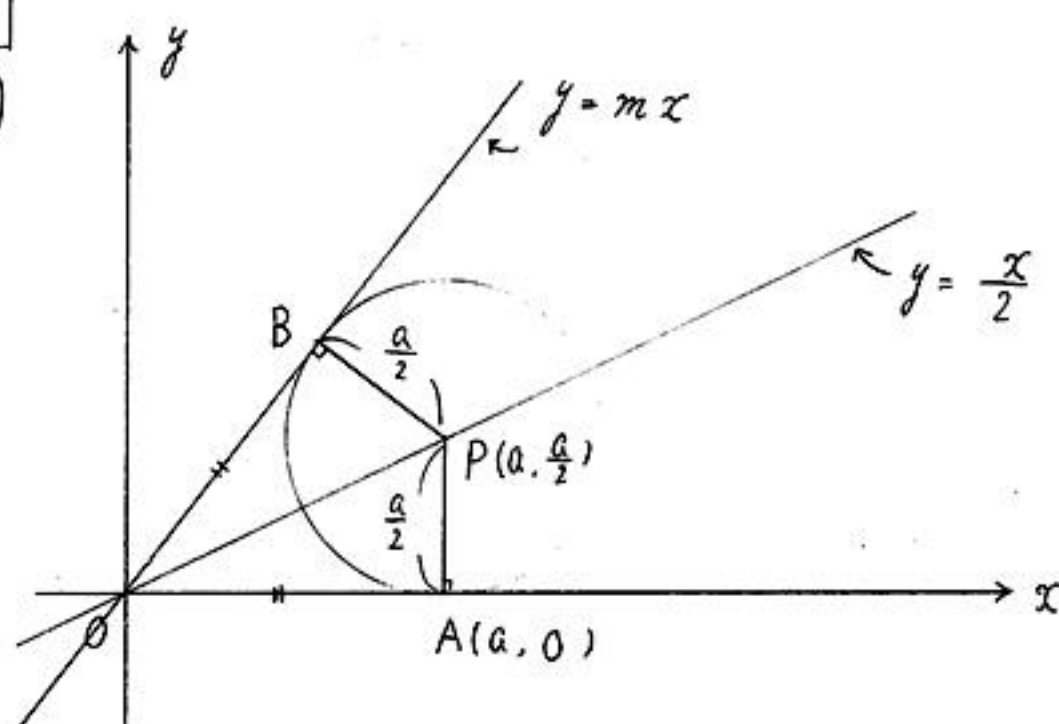
$\Leftrightarrow 2 \leq k \leq 3 \quad \therefore$ 下記のグラフ

----- 答)



3

(1)



$P(a, \frac{a}{2})$ を中心とする円が x 軸に接しているから A の座標は

$$(a, 0) \quad \text{----- (答)}$$

直線 m の方程式は

$$y = mx \quad (m \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow mx - y = 0 \quad \text{----- ①}$$

とおく。①と P との距離について

$$\frac{a}{2} = \frac{|m \cdot a - 1 \cdot \frac{a}{2}|}{\sqrt{m^2 + (-1)^2}} \quad \because a > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{2} \sqrt{m^2 + 1} = \frac{a}{2} |2m - 1|$$

$$\Rightarrow m^2 + 1 = (2m - 1)^2 \quad \because a > 0$$

$$\Leftrightarrow m(3m - 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow m = \frac{4}{3} \quad \because m \neq 0$$

図より B は第 1 象限に存在するので

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OB} &= a \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + (\frac{4}{3})^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix} \\ &= a \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

よって B の座標は

$$(\frac{3}{5}a, \frac{4}{5}a) \quad \text{----- (答)}$$

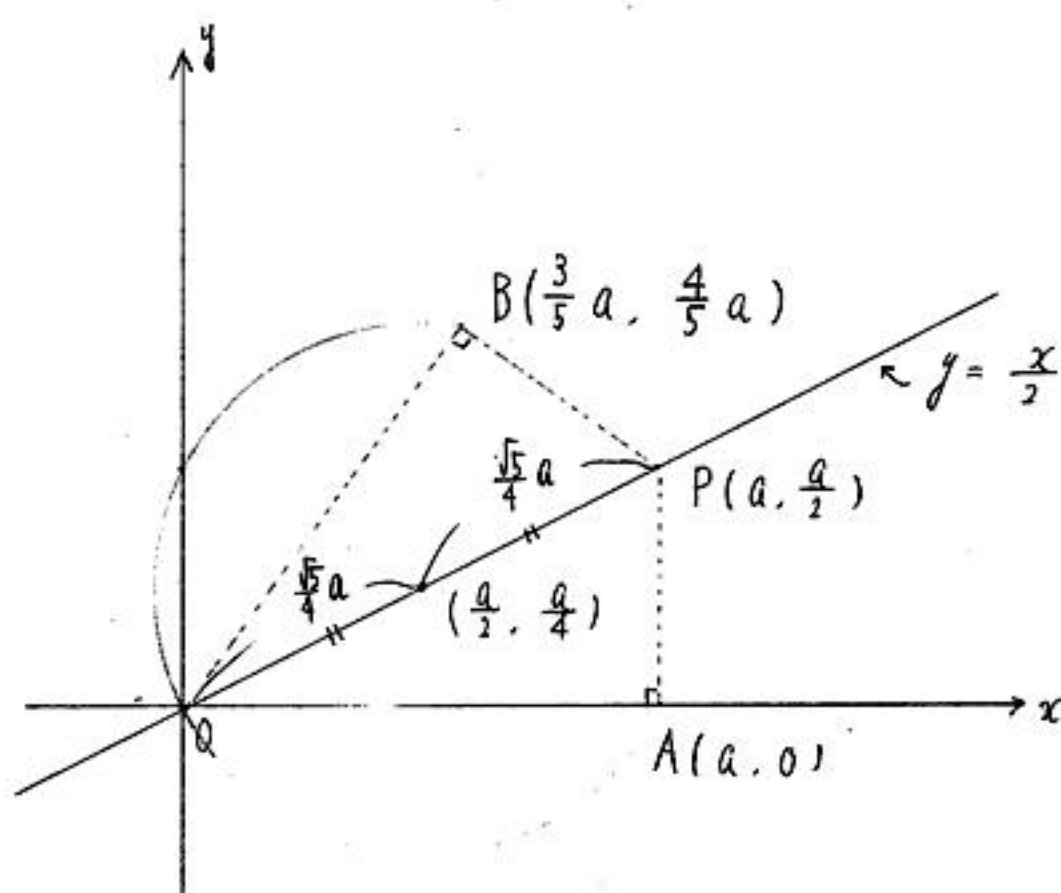
$$(2) \quad \angle OAP = \angle OBP = \frac{\pi}{2}$$

よって OP の中点 $(\frac{a}{2}, \frac{a}{4})$ が求める円の中心となる。円周角の定理の逆より、求める円の方程式は

$$(x - \frac{a}{2})^2 + (y - \frac{a}{4})^2 = (\frac{a}{2} - 0)^2 + (\frac{a}{4} - 0)^2$$

$$\Leftrightarrow (x - \frac{a}{2})^2 + (y - \frac{a}{4})^2 = \frac{5}{16} a^2$$

----- (答)



4

(1) AとBを通る直線の方程式は、次のように表せる。

$$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{AB} \quad (t \text{ はパラメーター})$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

よって、 $\overrightarrow{OB'}$ は、

$$z = 0 \Leftrightarrow 3 - 2t = 0$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{3}{2}$$

よって、

$$\overrightarrow{OB'} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{3}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

よって、よって、

$$\underline{B'(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}, 0)} \quad \dots\dots \text{答}$$

また、AとCを通る直線の方程式は、次のように表せる。

$$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA} + \lambda\overrightarrow{AC} \quad (\lambda \text{ はパラメーター})$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

よって、 $\overrightarrow{OC'}$ は、

$$z = 0 \Leftrightarrow 3 - \lambda = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda = 3$$

よって、

$$\overrightarrow{OC'} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}$$

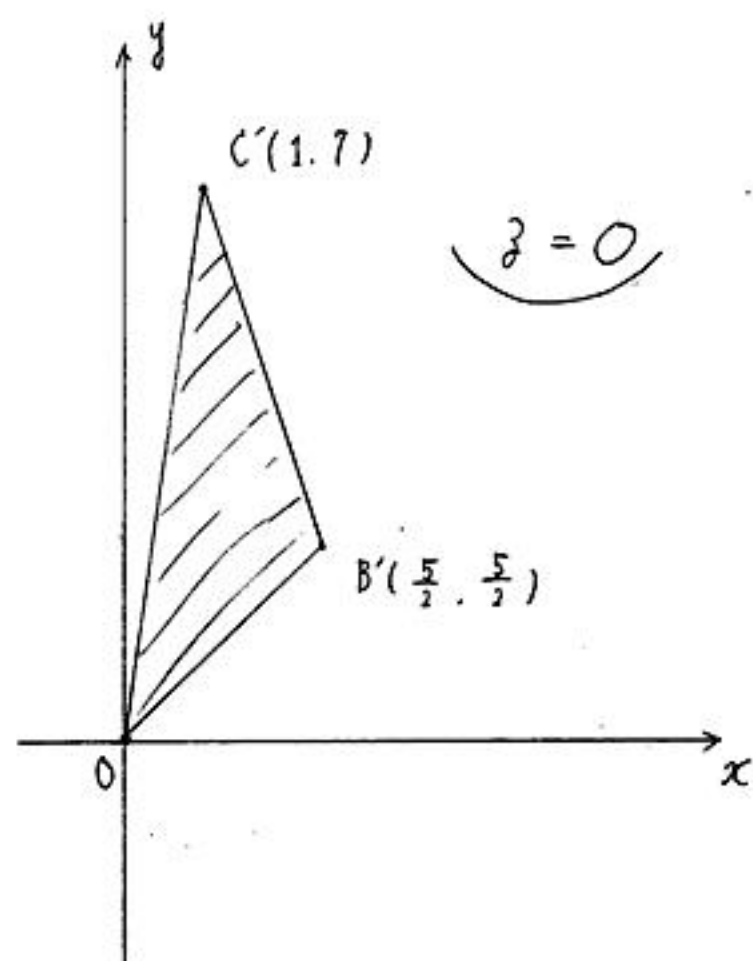
よって、よって、

$$\underline{C'(1, 7, 0)} \quad \dots\dots \text{答}$$

$$(2) \Delta OB'C' = \frac{1}{2} \sqrt{|\overrightarrow{OB'}|^2 |\overrightarrow{OC'}|^2 - (\overrightarrow{OB'}, \overrightarrow{OC'})^2}$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{5}{2}\sqrt{2}\right)^2 (1^2 + 7^2) - \left(\frac{5}{2} \cdot 1 + \frac{5}{2} \cdot 7\right)^2}$$

$$= \underline{\underline{\frac{15}{2}}} \quad \dots\dots \text{答}$$



5

$$(1) \begin{aligned} y &= x^2 - 2(a+1)x + 2a^2 - a - 3 \\ &= \{x - (a+1)\}^2 + a^2 - 3a - 4 \end{aligned}$$

$P(X, Y)$ とおく。

$$\begin{cases} X = a+1 \\ Y = a^2 - 3a - 4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow Y = (X-1)^2 - 3(X-1) - 4$$

$$\Leftrightarrow Y = X^2 - 5X$$

よ、7. 求める軌跡 C の方程式は

$$\underline{y = x^2 - 5x} \quad \cdots \text{ (答)}$$

$$(2) \begin{cases} y_1 = x_1^2 - 5x_1 \\ y_1 = x_1 \\ x_1 > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 = x_1(x_1 - 6) \\ y_1 = x_1 \\ x_1 > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \underline{(x_1, y_1) = (6, 6)} \quad \cdots \text{ (答)}$$

$$(3) R(x_2, y_2) \text{ 11.}$$

$$\begin{cases} y_2 = x_2^2 - 5x_2 \\ y_2 = 0 \\ x_2 > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (x_2, y_2) = (5, 0).$$

よ、7. $\overrightarrow{OR}$ 11.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OR} &= \begin{pmatrix} 0 & 12 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \cdot 5 + 12 \cdot 0 \\ 2 \cdot 5 + 0 \cdot 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

よ、7. $R'(x_3, y_3)$ 11.

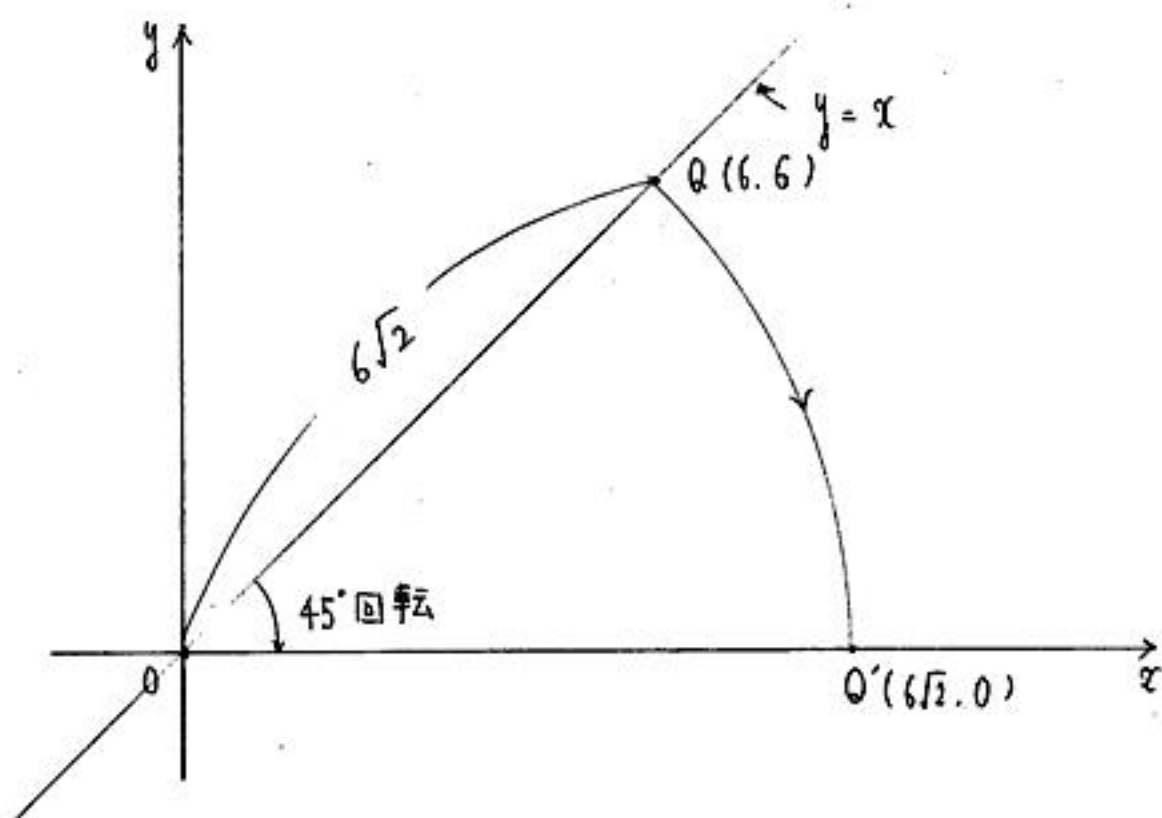
$$\underline{(x_3, y_3) = (0, 10)} \quad \cdots \text{ (答)}$$

(4) $y = x$ と x 軸の正の方向とのなす角は 45° である。よ、7. $Q'(x_4, y_4)$ 11

$$\underline{(x_4, y_4) = (6\sqrt{2}, 0)} \quad \cdots \text{ (答)}$$

また、原点を中心として 7 時計回りに 45° 回転を表す行列 B 11.

$$\begin{aligned} B &= \begin{pmatrix} \cos(-45^\circ) & -\sin(-45^\circ) \\ \sin 45^\circ & \cos(-45^\circ) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \quad \cdots \text{ (答)} \end{aligned}$$



6

$$(1) \quad 2x^2 - 2xy + y^2 = 4$$

$$\Leftrightarrow y^2 - 2xy + 2x^2 - 4 = 0 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$\Leftrightarrow y = x \pm \sqrt{4-x^2}$$

よって

$$F(x, y) = y^2 - 2xy + 2x^2 - 4$$

と置く。このとき

$$F(x, y) = F(-x, -y)$$

が成立するのて、①は、原点対称な曲線である。以下同様。

$$y = x + \sqrt{4-x^2}$$

の概形を調べることにする。

$$\begin{aligned} y' &= 1 + \frac{1}{2\sqrt{4-x^2}} \cdot (-2x) \\ &= \frac{\sqrt{4-x^2} - x}{\sqrt{4-x^2}} \end{aligned}$$

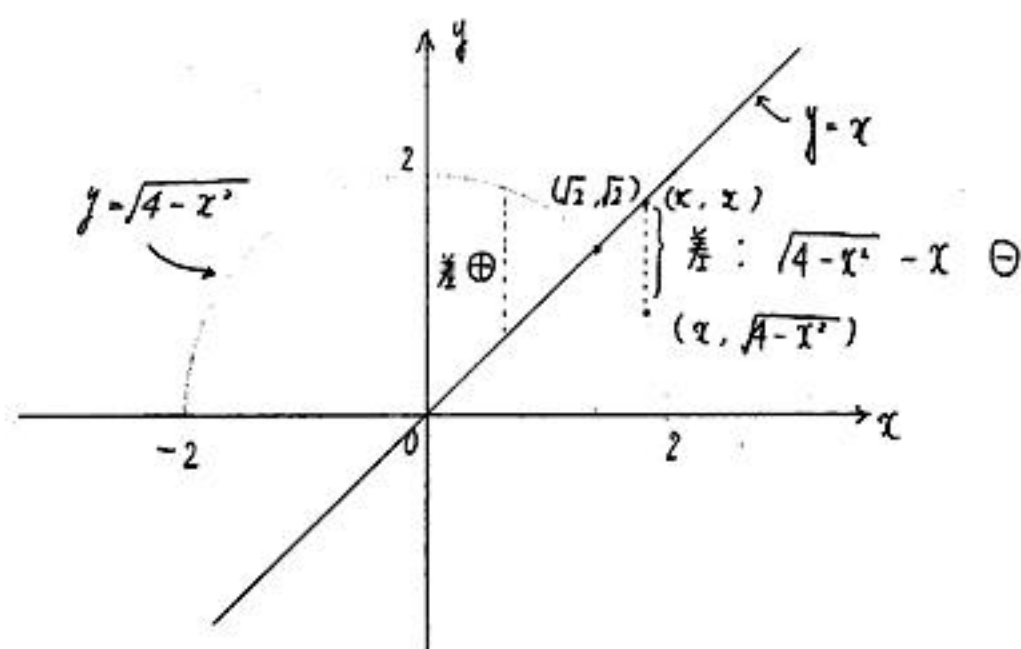
よって

$$y' = 0 \Leftrightarrow \sqrt{4-x^2} - x = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4-x^2 = x^2 \\ x > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = \sqrt{2}$$

よって、 y' の分子の符号変化(下図)に注意して、次の増減表を得る。



x	(-2)	$\cdots$	$\sqrt{2}$	$\cdots$	(2)
y'		$+$	0	$-$	
y	-2	$\nearrow$	$2\sqrt{2}$	$\searrow$	2

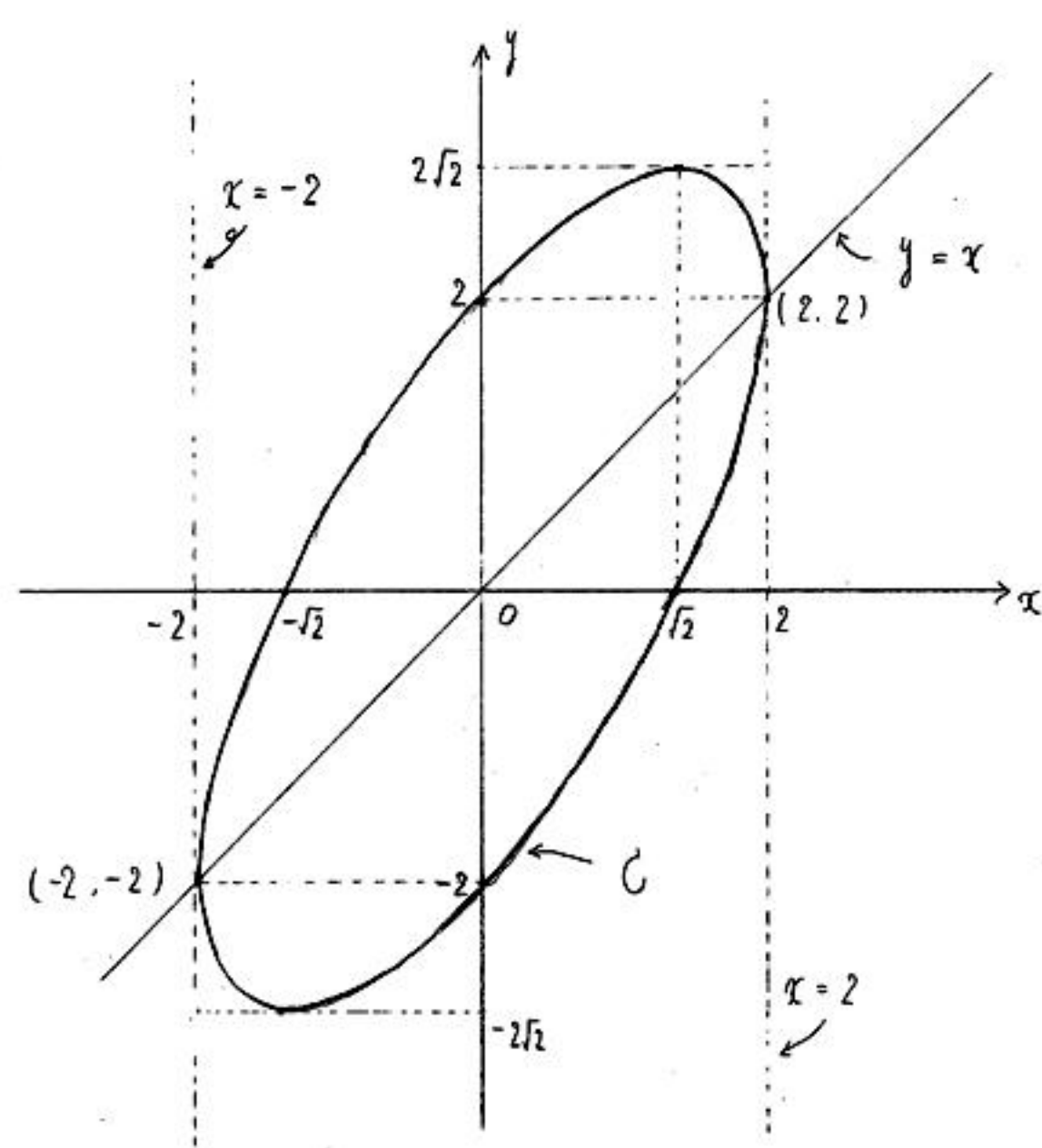
極大

また

$$\lim_{x \rightarrow 2-0} \left(1 - \frac{x}{\sqrt{4-x^2}} \right) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -2+0} \left(1 - \frac{x}{\sqrt{4-x^2}} \right) = +\infty$$

よって、 C の概形は、次のようになる。



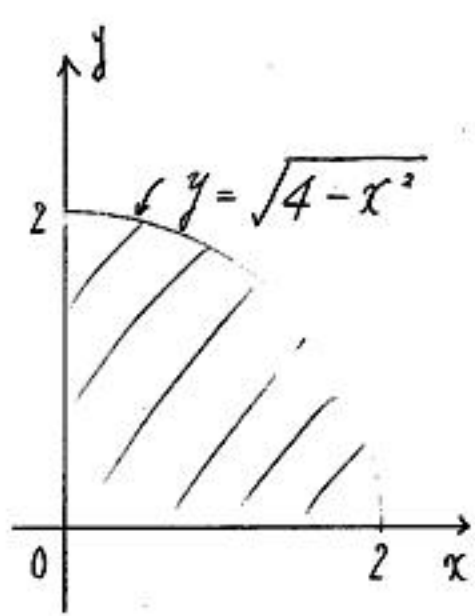
$$(2) \quad S = 2 \int_{-2}^2 (x + \sqrt{4-x^2} - x) dx$$

$$= 2 \int_{-2}^2 \sqrt{4-x^2} dx$$

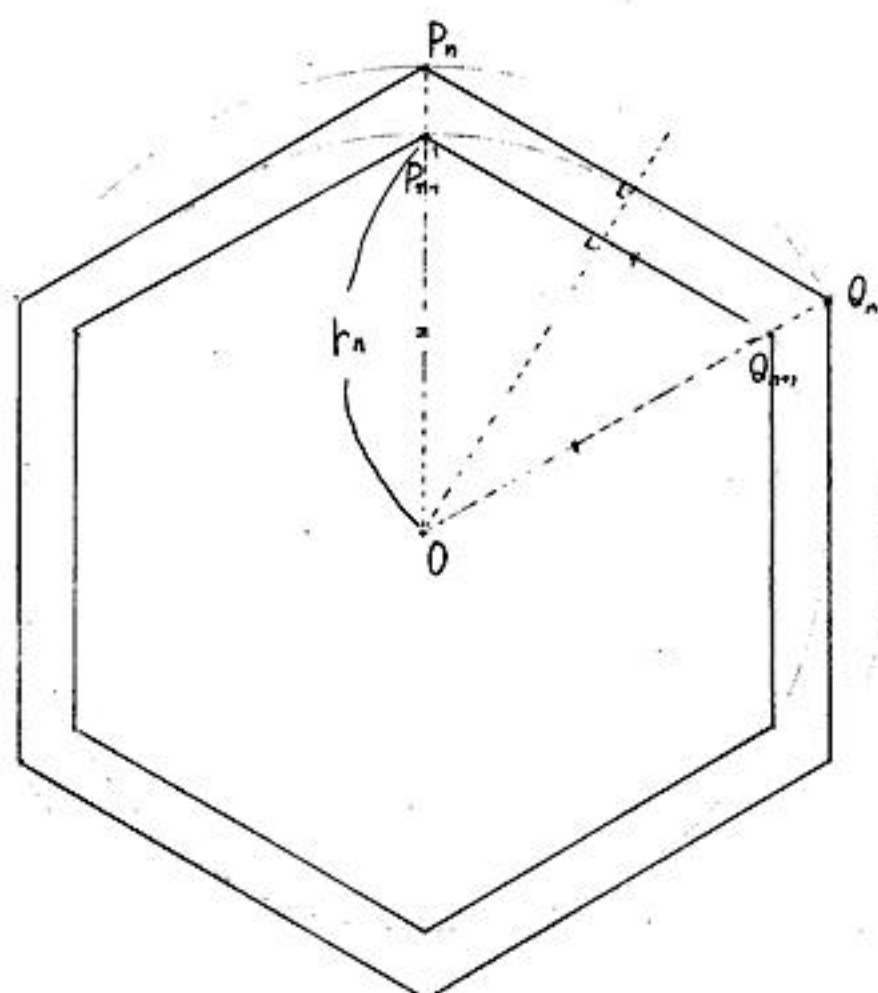
$$= 4 \int_0^2 \sqrt{4-x^2} dx$$

$$= 4 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 2^2 \cdot \frac{\pi}{4} \right)$$

$$= 4\pi \quad \cdots \text{--- (答)}$$



(1)



外側から n 番目の正六角形の頂点と図のように定める。この時

$$\begin{cases} P_1 Q_1 = 1 \\ P_{n+1} Q_{n+1} = \frac{\sqrt{3}}{2} P_n Q_n \end{cases}$$

が成立する。したがって

$$P_n Q_n = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n-1} \quad (n \geq 1)$$

また、外側から n 番目の円の半径

と r_n とおくと、

$$\begin{aligned} r_n &= \frac{\sqrt{3}}{2} P_n Q_n \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n-1} \quad (n \geq 1) \end{aligned}$$

が成立する。

よって

$$\begin{aligned} L_A &= \sum_{k=1}^{\infty} 6 P_k Q_k \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} 6 \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{k-1} \\ &= 6 \cdot \frac{1}{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}} \quad \because \left[\begin{array}{l} \text{公比 } 0 < \frac{\sqrt{3}}{2} < 1 \\ \text{より、無限和は} \\ \text{収束する} \end{array} \right] \dots \\ &= 12(2 + \sqrt{3}) \quad \dots\dots (*) \end{aligned}$$

----- (答)

また、

$$\begin{aligned} S_A &= \sum_{k=1}^{\infty} 6 \Delta O P_k Q_k \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} 6 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot P_k Q_k^2 \sin 60^\circ\right) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} 6 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{2(k-1)} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3\sqrt{3}}{2} \left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} \\ &= \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{3}{4}} \quad \because \left[\begin{array}{l} \text{公比 } 0 < \frac{3}{4} < 1 \\ \text{より、無限和は} \\ \text{収束する} \end{array} \right] \dots \\ &= 6\sqrt{3} \quad \dots\dots (**) \end{aligned}$$

----- (**)

$$\begin{aligned} (2) \quad L_B &= \sum_{k=1}^{\infty} 2\pi r_k \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} 2\pi \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{k-1} \\ &= \sqrt{3}\pi \cdot \frac{1}{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}} \quad \dots\dots (*) \\ &= 2\sqrt{3}\pi(2 + \sqrt{3}) \quad \dots\dots (答) \end{aligned}$$

また、

$$\begin{aligned} S_B &= \sum_{k=1}^{\infty} \pi r_k^2 \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \pi \left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} \\ &= \frac{3}{4}\pi \cdot \frac{1}{1 - \frac{3}{4}} \quad \because (**) \\ &= 3\pi \quad \dots\dots (答) \end{aligned}$$