

$$(1) (\text{左辺}) = X^2 - pX + qE$$

$$\begin{aligned}
 &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - (a+d) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \\
 &\quad + (ad - bc) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} a^2 + bc & b(a+d) \\ c(a+d) & bc + d^2 \end{pmatrix} \\
 &\quad + \begin{pmatrix} -a(a+d) & -b(a+d) \\ -c(a+d) & -d(a+d) \end{pmatrix} \\
 &\quad + \begin{pmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & ad - bc \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

よ、7.

$$(\text{左辺}) = (\text{右辺}) //$$

$$(2) X^3 - X^2 + X - E$$

$$= X^2(X - E) + (X - E)$$

$$= (X^2 + E)(X - E)$$

$$= (pX - qE + E)(X - E) \quad \because X^2 = pX - qE$$

$$= pX^2 + (-p - q + 1)X + (q - 1)E$$

$$= p(pX - qE) + (-p - q + 1)X + (q - 1)E$$

$$\because X^2 = pX - qE$$

$$= (p^2 - p - q + 1)X + (-pq + q - 1)E$$

よ、7.

任意の行列 X に対し、7.

$$X^3 - X^2 + X - E = \alpha X + \beta E$$

が成立する。

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha = p^2 - p - q + 1 \\ \beta = -pq + q - 1 \end{cases} \quad \dots\dots \text{答}$$

$$(3) \text{仮定: } X^3 - X^2 + X - E = 0 \quad \dots\dots \text{①}$$

と (2) の結果より

$$(p^2 - p - q + 1)X + (-pq + q - 1)E = 0$$

$$(I) p^2 - p - q + 1 = 0 \text{ の場合}$$

$$X = kE \quad (k \text{ は実数}) \quad \dots\dots \text{②}$$

と表わせる。この時、②を①へ代入して

$$(k^3 - k^2 + k - 1)E = 0$$

$$\Leftrightarrow (k^2 + 1)(k - 1)E = 0$$

$$\Leftrightarrow k = 1 \quad \because \begin{cases} E \neq 0 \\ k \text{ は実数} \end{cases}$$

よ、7. この場合は、①の解は

$$X = E$$

$$(II) p^2 - p - q + 1 = 0 \text{ の場合}$$

$$\begin{cases} p^2 - p - q + 1 = 0 \\ -pq + q - 1 = 0 \end{cases} \quad \because E \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} q = p^2 - p + 1 \\ (-p + 1)(p^2 - p + 1) - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} q^2 = p^2 - p + 1 \\ -p(p^2 - 2p + 2) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (p, q) = (0, 1) \quad \because \begin{cases} p^2 - 2p + 2 \\ \Leftrightarrow p = 1 \pm i \end{cases}$$

よ、7. (1) の結果より

$$X^2 - 0 \cdot X + 1 \cdot E = 0$$

$$\Leftrightarrow X^2 = -E$$

以上、(I)(II)より、題意は示された。 //

(1) l_t の方程式は

$$y = \frac{0 - \frac{1}{t^2}}{t - 0}(x - t) + 0$$

$$\iff y = -\frac{1}{t^3}x + \frac{1}{t^2} \quad \dots\dots(\text{答})\dots\dots\textcircled{1}$$

(2) ①に $x = k$ を代入して

$$y(t) = -\frac{1}{t^3}k + \frac{1}{t^2}$$

$y(t)$ の増減を以下で調べる.

$$y'(t) = -\left(-\frac{3t^2}{t^6}\right)k + \left(-\frac{2t}{t^4}\right)$$

$$= \frac{1}{t^3}\left(\frac{3}{t}k - 2\right)$$

よって,

$$y'(t) = 0 \iff \frac{3}{t}k - 2 = 0 \quad \because t > 1$$

$$\iff t = \frac{3}{2}k \quad (> 1)$$

よって, 増減表は次の通り.

t	(1)	...	$\frac{3}{2}k$	...
$y'(t)$		+	0	-
$y(t)$	$-k+1$	$\nearrow$	$\frac{4}{27k^2}$	$\searrow$

また,

極大

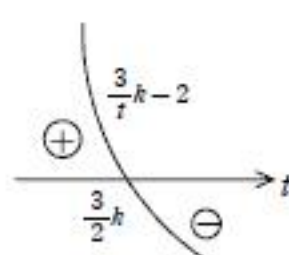
$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(-\frac{k}{t^3} + \frac{1}{t^2}\right)$$

$$= 0$$

$$k \geq 1 \iff -k + 1 \leq 0$$

したがって, 求める $y(t)$ の範囲は

$$-k + 1 \leq y(t) \leq \frac{4}{27k^2} \quad \dots\dots(\text{答})$$



(3) $k < 1$ の場合の $y(t)$ の増減を調べる.

(I) $\frac{3}{2}k < 1 \iff k < \frac{2}{3}$ の場合

$y(t)$ は $t \geq 1$ において, 単調減少関数となる. $\therefore$ (2) の結果, よって

$$0 < y(t) \leq -k + 1$$

(II) $\frac{3}{2} \leq k < 1$ の場合

$$\begin{cases} 1 \leq \frac{3}{2}k \\ 0 < -k + 1 \end{cases}$$

と, (2) の結果より,

$$0 < y(t) \leq \frac{4}{27k^2}$$

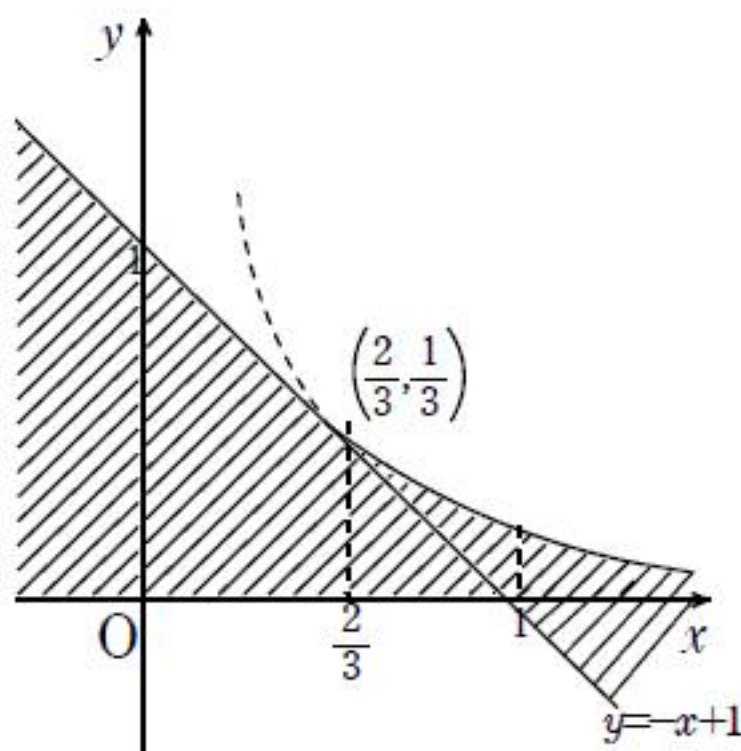
(III) $k > 1$ の場合

(2) より,

$$-k + 1 \leq y(t) \leq \frac{4}{27k^2} < 0$$

したがって, l_t の通過領域は下図の斜線の部分である。

ただし, $x < 1$ における x 軸上は含まない.



$$\begin{aligned}
 (1) \quad f_2(x) &= \int_1^x f_1(t) dt \\
 &= \int_1^x (t \log t - t + 1) dt \\
 &= \int_1^x \left(\frac{t^2}{2}\right)' \cdot \log t \, dt + \int_1^x (-t + 1) dt \\
 &= \left[\frac{t^2}{2} \cdot \log t\right]_1^x - \int_1^x \frac{t^2}{2} \cdot \frac{1}{t} dt + \int_1^x (-t + 1) dt \\
 &= \frac{x^2}{2} \log x - \frac{1}{2} \log 1 + \int_1^x \left(-\frac{3}{2}t + 1\right) dt \\
 &= \frac{x^2}{2} \log x + \left[-\frac{3}{4}t^2 + t\right]_1^x \\
 &= \frac{x^2}{2} \log x - \frac{3}{4}x^2 + x - \left(-\frac{3}{4} + 1\right) \\
 &= \frac{x^2}{2} \log x - \frac{3}{4}x^2 + x - \frac{1}{4} \quad \dots\dots (答)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad f_3(x) &= \int_1^x f_2(t) dt \\
 &= \int_1^x \left(-\frac{t^2}{2} \log t - \frac{3}{4}t^2 + t - \frac{1}{4}\right) dt \\
 &= \left[-\frac{t^3}{6} \log t\right]_1^x - \int_1^x \frac{t^3}{6} \cdot \frac{1}{t} dt \\
 &\quad + \int_1^x \left(-\frac{3}{4}t^2 + t - \frac{1}{4}\right) dt \\
 &= \frac{x^3}{6} \log x + \int_1^x \left(-\frac{11}{12}t^2 + t - \frac{1}{4}\right) dt \\
 &= \frac{x^3}{6} \log x + \left[-\frac{11}{36}t^3 + \frac{t^2}{2} - \frac{t}{4}\right]_1^x \\
 &= \frac{x^3}{6} \log x - \frac{11}{36}x^3 + \frac{x^2}{2} - \frac{x}{4} \\
 &\quad - \left(-\frac{11}{36} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) \\
 &= \frac{x^3}{6} \log x - \frac{11}{36}x^3 + \frac{x^2}{2} - \frac{x}{4} + \frac{1}{18} \quad \dots\dots (略)
 \end{aligned}$$

$$(3) \quad f_n(x) = \frac{1}{n!} x^n \log x + C_n(x) \quad \dots\dots (*)$$

ただし、 $C_n(x)$ は、 n 次以下の多項式。

以下で、(*) を n についての数学的帰納法を用いて証明する。

(i) $n = 1$ の時

$$f_1(x) = \frac{1}{1!} x^1 \log x + (-x + 1)$$

となり、確かに (*) は成立する。

(ii) $n = k$ の時

(*) が成立すると仮定する

(iii) $n = k+1$ の時

$$\begin{aligned}
 f_{k+1}(x) &= \int_1^x \left(\frac{1}{k!} t^k \log t + C_k(t)\right) dt \\
 &= \left[\frac{t^{k+1}}{(k+1)!} \log t\right]_1^x - \int_1^x \frac{t^{k+1}}{(k+1)!} \cdot \frac{1}{t} dt \\
 &\quad + \int_1^x C_k(t) dt \\
 &= \frac{1}{(k+1)!} x^{k+1} \log x \\
 &\quad + \int_1^x \left\{ -\frac{t^k}{(k+1)!} + C_k(t) \right\} dt
 \end{aligned}$$

2重下線部分の被積分関数は、帰納法の仮定より、 k 次以下の多項式関数である。よって、 $f_{k+1}(x)$ は、

$$f_{k+1}(x) = \frac{1}{(k+1)!} x^{k+1} \log x + C_{k+1}(x)$$

と表せる。

以上より、任意の自然数 n について、(*) が成立することから、数学的帰納法の原理により証明された。//

よって、

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f_n(x)}{x^n \log x} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n!} x^n \log x + C_n(x)}{x^n \log x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n!} + \frac{1}{\log x} \cdot \frac{C_n(x)}{x^n} \right) \\
 &= \frac{1}{n!} \quad \because C_n(x) \text{ は } n \text{ 次以下の多項式} \\
 \text{よって、} \\
 a_n &= \frac{1}{n!} \quad \dots\dots (答)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (4) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f_n(x) - a_n x^n \log x}{x^n} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n!} x^n \log x + C_n(x) - \frac{1}{n!} x^n \log x}{x^n} \quad \because (3) \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{C_n(x)}{x^n}
 \end{aligned}$$

証明すべきことは、次の(*) である：

$C_n(x)$ が、 n 次の多項式であり、かつ最高次の係数は

$$-\frac{1}{n!} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!}$$

である。----- (*)

(*) を n についての数学的帰納法を用いて以下で証明する。

(i) $n = 1$ の時

$$C_1(x) = -x + 1$$

$$= -\frac{1}{1!} \left(\sum_{k=1}^1 \frac{1}{k!} \right) x + 1$$

よって、確かに (*) は成立する。

(ii) $n = l$ の時

(*) の成立を仮定する。すなわち、

$$C_l(x) = -\frac{1}{l!} \left(\sum_{k=1}^l \frac{1}{k!} \right) x^l + d_l(x)$$

(ただし、 $d_l(x)$ は、 $(l-1)$ 次以下の多項式) と仮定する。

(iii) $n = l+1$ の時

帰納法の仮定と (3) より

$$\begin{aligned}
 f_{l+1}(x) &= \int_1^x \left\{ \frac{1}{l!} t^l \log t + C_l(t) \right\} dt \\
 &= \left[\frac{1}{(l+1)!} t^{l+1} \log t \right]_1^x \\
 &\quad - \int_1^x \frac{1}{(l+1)!} t^{l+1} \cdot \frac{1}{t} dt + \int_1^x C_l(t) dt \\
 &= \frac{1}{(l+1)!} x^{l+1} \log x \\
 &\quad + \int_1^x \left\{ \left[-\frac{1}{(l+1)!} - \frac{1}{l!} \left(\sum_{k=1}^l \frac{1}{k!} \right) \right] t^l + d_l(t) \right\} dt \\
 &= \frac{1}{(l+1)!} x^{l+1} \log x \\
 &\quad + \int_1^x \left\{ -\frac{1}{l!} \left(\sum_{k=1}^{l+1} \frac{1}{k!} \right) t^l + d_l(t) \right\} dt \\
 &= \frac{1}{(l+1)!} x^{l+1} \log x \\
 &\quad - \frac{1}{(l+1)!} \left(\sum_{k=1}^{l+1} \frac{1}{k!} \right) x^{l+1} \\
 &\quad + \frac{1}{(l+1)!} \left(\sum_{k=1}^{l+1} \frac{1}{k!} \right) + \int_1^x d_l(t) dt
 \end{aligned}$$

2重下線部分は、 l 次以下の多項式である。よって、 $n = l+1$ の時も (*) は成立する。

よって、任意の自然数 n について (*) が成立することから、数学的帰納法の原理により、証明された。//