

数 学

(理学部 数学科)

(平成18年度)

問題冊子 1～2 ページ

答案用紙 3 枚

注 意 事 項

1. 試験開始の合図があるまでこの冊子を開いてはいけない。
2. 枚数の不足や、印刷に不鮮明なところがあれば申し出ること。
3. 解答は必ず答案用紙の指定された箇所に入力すること。
4. 受験番号は、答案用紙1枚ごとに所定の欄2箇所に入力すること。入力を忘れたり、あるいは誤った番号を入力した場合は失格となることがある。
5. 試験が終了したら、答案用紙を上から(その1)、(その2)、(その3)の順番に重ねて机の上に置くこと。
6. 退室するときは、問題冊子を持ち帰ること。

1

(30点)

$X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ を成分が実数である 2×2 行列とし、

$$p = a + d, \quad q = ad - bc$$

とおく。また、行列 E, O を

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

とする。

- (1) $X^2 - pX + qE = O$ であることを証明せよ。
- (2) $X^3 - X^2 + X - E = \alpha X + \beta E$ を満たす実数 α, β を p と q を用いて表せ。
- (3) X が $X^3 - X^2 + X - E = O$ を満たすとき、 $X = E$ または $X^2 = -E$ であることを示せ。

2

(35点)

t を 1 以上の実数とし、 xy 平面上の 2 点 $(t, 0), (0, \frac{1}{t^2})$ を通る直線を l_t とする。

- (1) 直線 l_t の方程式を求めよ。
- (2) k を 1 以上の定数とする。直線 $x = k$ と直線 l_t の交点の y 座標を $y(t)$ とおく。 t を 1 以上の範囲で動かしたとき、 $y(t)$ の取り得る値の範囲を k を用いて表せ。
- (3) t を 1 以上の範囲で動かしたとき、 l_t が通過する領域を xy 平面上に図示せよ。

3

(35点)

自然数 n に対して、関数 $f_n(x)$ ($x > 0$) を

$$f_1(x) = x \log x - x + 1, \quad f_{n+1}(x) = \int_1^x f_n(t) dt \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

で定める。

- (1) $f_2(x)$ を求めよ。
- (2) $f_3(x)$ を求めよ。
- (3) 極限 $a_n = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f_n(x)}{x^n \log x}$ を求めよ。
- (4) (3) で求めた a_n に対し、

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f_n(x) - a_n x^n \log x}{x^n} = -\frac{1}{n!} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

となることを示せ。