

(1)

 $f(x)$ を因数分解すると,

$$\begin{aligned} f(x) &= -3(x+2)a^2 + x(x+2)a + x^2(x+2) \\ &= (x+2)(x^2 + ax - 3a^2) \end{aligned}$$

である. よって, $f(x) = 0$ の解は, $x = -2, \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2}a$ である.

(2)

$f(x)$ の因数である $x^2 + ax - 3a^2$ は, 有理係数の 1 次式の積には分解できない. なぜなら, $x^2 + ax - 3a^2 = 0$ の解は, $x = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2}a$ であって, これはいかなる a についても有理数にはならないからである. 従って, $f(x)$ と $g(x)$ が 2 次の共通因数を持つならば, それは $x^2 + ax - 3a^2$ に他ならない.

そこで, $g(x) = (x-m)(x^2 + ax - 3a^2)$ と因数分解できたとして, 展開して係数を比較すると,

$$\begin{cases} a - m = 2 & \cdots \textcircled{1} \\ 3a^2 + am = b & \cdots \textcircled{2} \\ 3a^2m = -c & \cdots \textcircled{3} \end{cases}$$

という関係式を得る. ① から m は整数であることがわかる. ③ の式で, c が素数であることから, $a^2m = -1$ でなくてはならない. これと ① を同時に満たす (a, m) は $(a, m) = (1, -1)$ に限る. よってこのとき, $a = 1, b = 2, c = 3$ である.

(1)

$$\begin{aligned}
 156^2 + 65^2 - 120^2 - 119^2 &= 156^2 - 120^2 - (119^2 - 65^2) \\
 &= (156 - 120)(156 + 120) - (119 - 65)(119 + 65) \\
 &= 36 \cdot 276 - 54 \cdot 184 \\
 &= 108 \cdot 92 - 108 \cdot 92 \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

(2) $\angle ABC = \alpha$ とおくと, $\angle ADC = 180^\circ - \alpha$ である. 余弦定理を $\triangle ABC$ と $\triangle ADC$ に適用して,

$$\begin{aligned}
 AC^2 &= 156^2 + 65^2 - 2 \cdot 156 \cdot 65 \cdot \cos \alpha \\
 AC^2 &= 120^2 + 119^2 + 2 \cdot 120 \cdot 119 \cdot \cos \alpha
 \end{aligned}$$

を得る. この2式の辺々を引くと, (1) より, $\cos \alpha = 0$ を得る. つまり, $\triangle ABC$ は $\angle ABC = 90^\circ$ の直角三角形である. 従って, $AC^2 = 156^2 + 65^2 = (12^2 + 5^2) \cdot 13^2 = 169^2$ となり, **$AC = 169$** を得る.

(3) $\sin 2\alpha = 2 \cos \alpha \sin \alpha$ である. $\cos \alpha = \frac{156}{169} = \frac{12}{13}$, $\sin \alpha = \frac{5}{13}$ なので, $\sin 2\alpha = \frac{120}{169}$ となる. 一方, $\sin \beta = \frac{120}{169}$ であるので, $\sin 2\alpha = \sin \beta$ である. $\alpha, \beta < 90^\circ$ であることに注意すれば, **$2\alpha = \beta$** となる.

$$C_1: y = -x^2 + 2ax - a^2 - a + \frac{3}{2}$$

$$C_2: y = x^2$$

とする.

(1)

A, B の x 座標をそれぞれ α, β とする. A における C_1 の接線の傾きは $-2\alpha + 2a$, B における C_2 の接線の傾きは 2β であり, これらは等しいので,

$$\alpha + \beta = a \cdots \textcircled{1}$$

が成り立つ. すると, A の y 座標は,

$$-\alpha^2 + 2a\alpha - a^2 - a + \frac{3}{2} = -(\alpha - a)^2 - a + \frac{3}{2} = -\beta^2 - a + \frac{3}{2}$$

となる. 従って, AB の中点 M は $\left(\frac{a}{2}, -\frac{1}{2}a + \frac{3}{4}\right)$ となり, β に依存しない. 問題の定点はあるとすれば一つであるから, 直線 AB は必ず M を通る. (証明終り)

(2)

$x^2 = -x^2 + 2ax - a^2 - a + \frac{3}{2}$ が実数解を持つような a の条件を求めればよい. この方程式を変形して, $2x^2 - 2ax + a^2 + a - \frac{3}{2} = 0$ となる. 判別式を D とすると,

$$D/4 = a^2 - 2(a^2 + a - \frac{3}{2}) = -a^2 - 2a + 3 = -(a-1)(a+3) \geq 0$$

より, $0 < a \leq 1$ を得る.

(3)

まず, C_1 と C_2 が交われば, 最小値は明らかに 0 である. よって, $1 < a$ の時を考える.

α を固定する. B_0 における C_2 の接線 l と線分 AB_0 が直交するように C_2 上に B_0 をとる. C_2 上に別の点 B をとると, C_2 と A は l に関して必ず反対側に位置しているので, $AB_0 < AB$ が成立する. 故に, A を固定しておけば $B = B_0$ のとき AB は最小になる.

一方この議論は, A と B の役割を入れ替えても同じであるから, AB が最小になるのは, A と B が (1) の状況にあり, なおかつ線分 AB が B における C_2 の接線と直交する場合である. ① より, AB の傾きは $\frac{2\beta^2 + a - 3/2}{2\beta - a}$ であるので,

$$\frac{2\beta(2\beta^2 + a - 3/2)}{2\beta - a} = -1$$

という関係式を得る. これを変形して,

$$0 = 4\beta^3 + (2a-1)\beta - a = (2\beta-1)(2\beta^2 + \beta + a)$$

を得る. よって, $\beta = \frac{1}{2}$ を得る. (1) の定点 M について C_1 と C_2 は対称であることに注意すれば, $B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ と M との距離の 2 倍が求める最小値であり,

$$2BM = 2\sqrt{\left(\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}a + \frac{3}{4} - \frac{1}{4}\right)^2} = \sqrt{2}(a-1)$$

である.

よって, 求める最小値は, $0 < a \leq 1$ のとき 0, $1 < a$ のとき $\sqrt{2}(a-1)$ である.

(1) $x^3+ax^2+bx+c=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$ と書けるので、展開して係数を比較することにより、 $a=-(\alpha+\beta+\gamma)$, $b=\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$, $c=-\alpha\beta\gamma$ を得る.

(2) 縦、横、高さをそれぞれ α , β , γ とすると、(i) と (ii) より、

$$\begin{cases} \alpha+\beta+\gamma=9 \\ 2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)=48 \end{cases}$$

という関係式を得る. ここで、体積を V とすると、 $V=\alpha\beta\gamma$ なので、 α , β , γ は方程式

$$x^3-9x^2+24x-V=0 \cdots \textcircled{1}$$

の正の解である. 従って、 $\textcircled{1}$ が 3 つの正の実数解を持つ条件を考える.

$f(x)=x^3-9x^2+24x$ とおく. $f'(x)=3x^2-18x+24=3(x-2)(x-4)$ であるから、 $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=2, 4$ となる. よって増減表は下のようになる.

x	$\cdots$	2	$\cdots$	4	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	20	$\searrow$	16	$\nearrow$

$\textcircled{1}$ の解は、 $y=f(x)$ と直線 $y=V$ との交点の x 座標であるから、下の $y=f(x)$ のグラフより、 $\textcircled{1}$ が 3 つの正の解を持つような V の中で最大のものは 20 である.

