

問題の条件式の左辺を，A を始点とするベクトルで書き換えると，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP} - \overrightarrow{BP} \cdot \overrightarrow{CP} + \overrightarrow{CP} \cdot \overrightarrow{AP} &= \overrightarrow{AP} \cdot (\overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AB}) - (\overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AB}) \cdot (\overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AC}) \\ &\quad + (\overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AP} \\ &= |\overrightarrow{AP}|^2 - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}\end{aligned}$$

となるので，条件式は $|\overrightarrow{AP}|^2 = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ と同値になる．この式の右辺の値は $1 \cdot 1 \cdot \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ となるので， $|\overrightarrow{AP}| = \frac{\sqrt{2}}{2}$ を得る．従って，**P** は **A** を中心とする半径 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ の円を描く．

(1)

 n に関する帰納法で示す. $n=1$ のとき, $c_1 = -b_1 = a_1$ であり, $c_2 = -b_1 + b_2 = a_1 - a_1 + a_2 = a_2$ となるので成立する. $n=k$ のとき,

$$c_{2k-1} = \sum_{l=1}^k a_{2l-1}$$

$$c_{2k} = \sum_{l=1}^k a_{2l}$$

が成立していると仮定する. このとき,

$$c_{2k+1} = c_{2k-1} + b_{2k} - b_{2k+1}$$

$$= c_{2k-1} - (-1)^{2k+1} a_{2k+1}$$

$$= \sum_{l=1}^{k+1} a_{2l-1}$$

であり,

$$c_{2(k+1)} = c_{2k} - b_{2k+1} + b_{2k+2}$$

$$= c_{2k} + (-1)^{2k+2} a_{2k+2}$$

$$= \sum_{l=1}^{k+1} a_{2l}$$

であるので, $n=k+1$ でも成立する.

以上より結論を得る. (証明終り)

(2)

まず, $a_1 = c_1 = 12$ と $a_2 = c_2 = 81$ に注意しておく. $k > 1$ となる k に対して, (1) より,

$$a_{2k-1} = c_{2k-1} - c_{2k-3}$$

$$a_{2k} = c_{2k} - c_{2k-2}$$

であるから, いずれにしても $n \leq 3$ ならば, $a_n = c_n - c_{n-2}$ が成立する. 従って,

$$a_n = (n+1)^2 3^n - (n-1)^2 3^{n-2} = 4(2n+1)(n+2)3^{n-2}$$

となる. 以上をまとめて

$$a_n = \begin{cases} 12 & (n=1) \\ 81 & (n=2) \\ 4(2n+1)(n+2)3^{n-2} & (n \geq 3) \end{cases}$$

を得る.

(1)

Pを通り、 $\vec{n}$ に垂直な直線は、 $x \cos \theta + y \sin \theta = a \cos \theta + b \sin \theta$ で与えられる。従って、QとRの座標は、

$$Q(a + b \tan \theta, 0), \quad R\left(0, \frac{a}{\tan \theta} + b\right)$$

となるので、

$$QR = \sqrt{(a + b \tan \theta)^2 + \left(\frac{a}{\tan \theta} + b\right)^2} = \frac{a + b \tan \theta}{\sin \theta}$$

を得る。これを $f(\theta)$ とおく。微分をすると

$$f'(\theta) = -\frac{a \cos \theta}{\sin^2 \theta} + \frac{b \sin \theta}{\cos^2 \theta} = \frac{b \sin^3 \theta - a \cos^3 \theta}{\sin^2 \theta \cos^2 \theta}$$

となるので、 $f'(\theta) = 0 \Leftrightarrow \tan \theta = \sqrt[3]{\frac{a}{b}}$ となる。これを満たす θ を α とする。すると、 $f(\theta)$ の増減表は下のようになる。

θ	(0)	...	α	...	$\left(\frac{\pi}{2}\right)$
$f'(\theta)$		-	0	+	
$f(\theta)$		$\searrow$		$\nearrow$	

従って、 $\theta = \alpha$ のとき最小であり、最小値は、

$$f(\alpha) = \left(a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$$

(2)

$ab = 8$ であるので、 $b = \frac{8}{a}$ を (1) の最小値に代入して、相加相乗平均不等式を使うと、

$$l = \left(a^{\frac{2}{3}} + \frac{4}{a^{\frac{2}{3}}}\right)^{\frac{3}{2}} \geq \left(2\sqrt{a^{\frac{2}{3}} \cdot \frac{4}{a^{\frac{2}{3}}}}\right)^{\frac{3}{2}} = 8$$

を得る。この等号は、 $a^{\frac{2}{3}} = 2$ のとき、つまり、 $a = 2\sqrt{2}$ のとき成立するので、 l の最小値は 8 である。

(1)

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1+k/n} \\
 &= \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx \\
 &= [\log(1+x)]_0^1 \\
 &= \log 2
 \end{aligned}$$

(2)

$M_n = {}_n C_2 = \frac{n(n-1)}{2}$ である.

L_n を求めるため, n の偶奇で場合分けする.

1. n が偶数 ($n = 2k$) のとき, 2つの頂点の間の中心角として考えられるのは, $\frac{\pi}{k}, \frac{2\pi}{k}, \dots, \frac{(k-1)\pi}{k}, \pi$ である. そして, π のときの組み合わせは k 組, それ以外は $2k$ 組の組み合わせがあるので,

$$\begin{aligned}
 \frac{L_{2k}}{M_{2k}} &= \sum_{l=1}^{k-1} \frac{2 \sin(l\pi/2k) \cdot 2k}{2k(2k-1)/2} + \frac{2k}{2k(2k-1)/2} \\
 &= \sum_{l=1}^k \frac{4 \sin(l\pi/2k)}{2k-1} - \frac{2}{2k-1} \\
 &= \frac{4}{k} \sum_{l=1}^k \frac{\sin(l\pi/2k)}{2-1/k} - \frac{2}{2k-1}
 \end{aligned}$$

であるので,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{L_{2k}}{M_{2k}} = \int_0^1 2 \sin \frac{\pi x}{2} dx = \frac{4}{\pi}$$

2. n が奇数 ($n = 2k-1$) のとき, 同様にして2つの頂点の間の中心角として考えられるのは, $\frac{\pi}{k}, \frac{2\pi}{k}, \dots, \frac{(k-1)\pi}{k}$ であり, それぞれ $2k$ 組の組み合わせがあるので,

$$\frac{L_{2k-1}}{M_{2k-1}} = \sum_{l=1}^{k-1} \frac{4 \sin(l\pi/2k)}{2k-1}$$

となる. よって, $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{L_{2k-1}}{M_{2k-1}}$ は 1. と同じ $\frac{4}{\pi}$ になる.

以上の議論より, 求める極限は $\frac{4}{\pi}$ である.