

(1)

$$\begin{aligned}
 \frac{dy}{dx} &= (5^{-x})' \cos x \log |\cos x| + 5^{-x} (\cos x)' \log |\cos x| + 5^{-x} \cos x (\log |\cos x|)' \\
 &= -5^{-x} (\log 5) \cos x \log |\cos x| - 5^{-x} \sin x \log |\cos x| - 5^{-x} \cos x \cdot \frac{\sin x}{\cos x} \\
 &= -5^{-x} \{(\log 5 \cos x + \sin x) \log |\cos x| + \sin x\}
 \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{dy}{dx} = -5^{-x} \{(\log 5 \cos x + \sin x) \log |\cos x| + \sin x\}$$

(2)

$$\begin{aligned}
 \frac{x^3 - 4x^2 - x - 2}{x^2 - 5x + 4} &= x + 1 - \frac{6}{(x-1)(x-4)} \\
 &= x + 1 - \frac{2}{x-4} + \frac{2}{x-1}
 \end{aligned}$$

であることに注意すれば,

$$\begin{aligned}
 \int \frac{x^3 - 4x^2 - x - 2}{x^2 - 5x + 4} dx &= \int \left(x + 1 - \frac{2}{x-4} + \frac{2}{x-1} \right) dx \\
 &= \frac{1}{2} x^2 + x + 2 \log \left| \frac{x-1}{x-4} \right| + C
 \end{aligned}$$

(ただし C は積分定数)

となる。

$$(\text{答}) \quad \int \frac{x^3 - 4x^2 - x - 2}{x^2 - 5x + 4} dx = \frac{1}{2} x^2 + x + 2 \log \left| \frac{x-1}{x-4} \right| + C \quad (\text{ただし } C \text{ は積分定数})$$

まず、常に $a_n > b_n$ であることを n に関する帰納法で示す。 $n=0$ のとき、つまり操作の前は明らかに $a_0 > b_0$ である。 $a_n > b_n$ であるとする、 a_{n+1} と b_{n+1} は

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n - \frac{a_n - b_n}{10} + 1 = \frac{9a_n + b_n}{10} + 1 & \dots \textcircled{1} \\ b_{n+1} = b_n + \frac{a_n - b_n}{10} - 1 = \frac{a_n + 9b_n}{10} - 1 & \dots \textcircled{2} \end{cases}$$

と与えられる。よって、 $\textcircled{1}-\textcircled{2}$ を考えれば、

$$a_{n+1} - b_{n+1} = \frac{4}{5}(a_n - b_n) + 2 > 0$$

であるので、 $n+1$ でも成立する。よって、 $a_n > b_n$ が任意の n に対して成り立つ。

$\textcircled{1}-\textcircled{2}$ と $\textcircled{1}+\textcircled{2}$ を同時に考えれば、

$$\begin{cases} a_{n+1} + b_{n+1} = a_n + b_n & \dots \textcircled{3} \\ a_{n+1} - b_{n+1} = \frac{4}{5}(a_n - b_n) + 2 & \dots \textcircled{4} \end{cases}$$

を得る。 $\textcircled{3}$ より、 $a_n + b_n = 15$ を得る。一方、 $\textcircled{4}$ より、 $\{a_n - b_n - 10\}$ は第0項 $10 - 5 - 10 = -5$ 、公比 $\frac{4}{5}$ の等比数列なので、

$$a_n - b_n = 10 - 5\left(\frac{4}{5}\right)^n$$

である。これらより、

$$a_n = \frac{5}{2} \left\{ 5 - \left(\frac{4}{5}\right)^n \right\}$$

を得る。

$$(\text{答}) \quad a_n = \frac{5}{2} \left\{ 5 - \left(\frac{4}{5}\right)^n \right\}$$

(1)

$$2^{2x} + \frac{1}{2^{2x}} = \left(2^x + \frac{1}{2^x}\right)^2 - 2 \\ = t^2 - 2$$

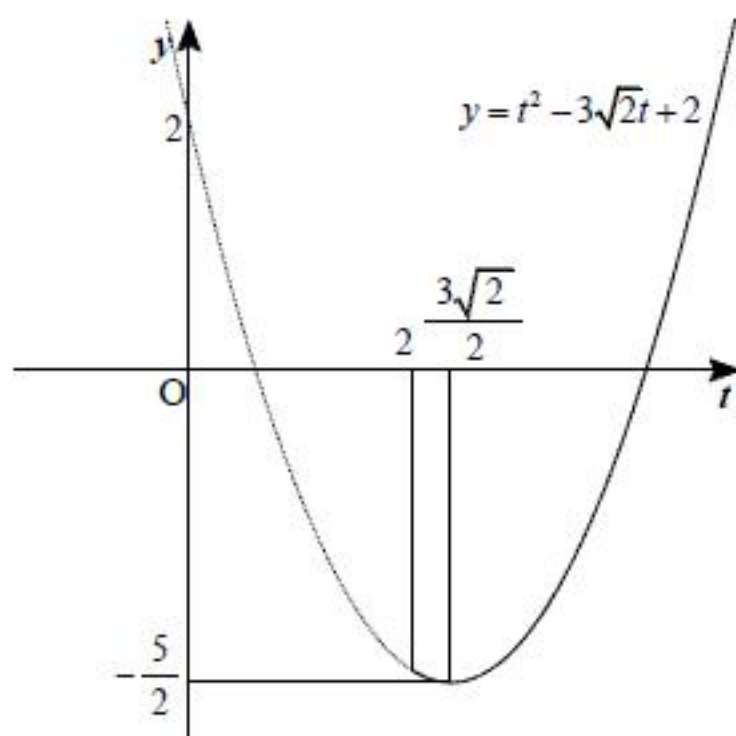
であるから、

$$f(x) = t^2 - 2 - 3\sqrt{2}t + 4 \\ = t^2 - 3\sqrt{2}t + 2$$

である。ここで、相加相乗平均不等式より、

$$t \geq 2\sqrt{2^x \cdot \frac{1}{2^x}} = 2$$

であるから、グラフは以下のようになる。



(答) 前図

(2)

(1)のグラフより、 $f(x)$ は $t = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ のとき最小値をとる。このとき、

$$2^x + \frac{1}{2^x} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

を解いて、

$$2^x = \sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}$$

すなわち

$$x = \pm \frac{1}{2}$$

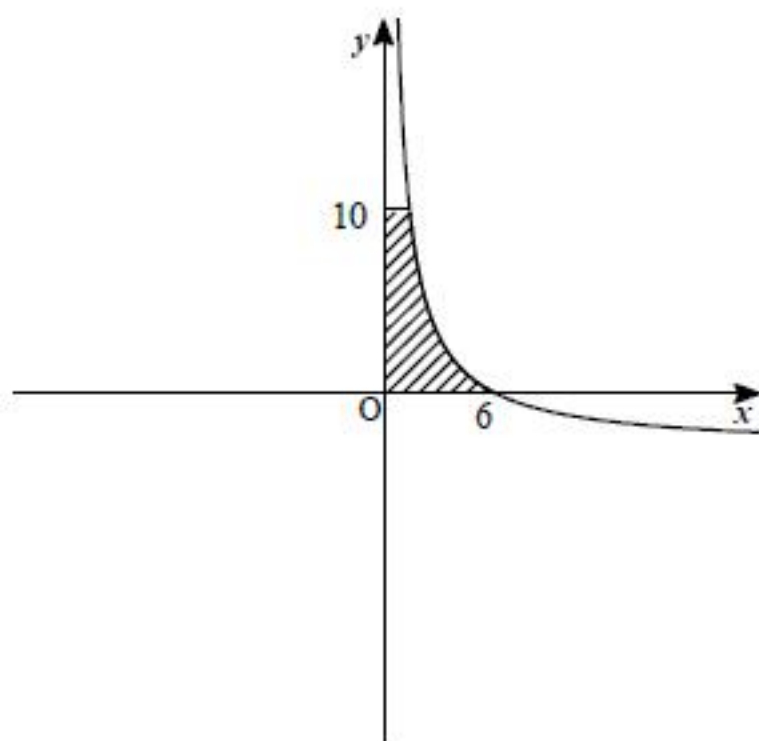
を得る。よって、 $x = \pm \frac{1}{2}$ のとき $f(x)$ は最小値 $-\frac{5}{2}$ をとる。

(答) $x = \pm \frac{1}{2}$ のとき最小値 $-\frac{5}{2}$

4

(1)

$1 \leq x \leq 6$ における $y = \frac{18}{x} - 3$ のグラフは下図の実線部のようになる。



x を y の式で表すと

$$x = \frac{18}{y+3}$$

となるので、体積 V は

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{10} \pi x^2 dy \\ &= \int_0^{10} \pi \left(\frac{18}{y+3} \right)^2 dy \\ &= 324\pi \left[-\frac{1}{y+3} \right]_0^{10} \\ &= 324\pi \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{13} \right) \\ &= \frac{1080}{13} \pi \end{aligned}$$

となる。

(答) $V = \frac{1080}{13} \pi$

(2)

深さ h になった時刻を t とすると、(1)より

$$at = \int_0^h \pi \left(\frac{18}{y+3} \right)^2 dy$$

が成り立つ。これを t で微分して

$$\begin{aligned} a &= \pi \left(\frac{18}{h+3} \right)^2 \cdot \frac{dh}{dt} \\ \therefore \frac{dh}{dt} &= \frac{a}{\pi} \left(\frac{h+3}{18} \right)^2 \end{aligned}$$

を得る。これに $h=5$ を代入して

$$\begin{aligned} \frac{dh}{dt} &= \frac{a}{\pi} \left(\frac{8}{18} \right)^2 \\ &= \frac{16a}{81\pi} \end{aligned}$$

を得る。

(答) $\frac{16a}{81\pi}$

(1)

$$f'(x) = -12x^3 + 12bx^2 + 48x - 48b$$

$$= -12(x-b)(x-2)(x+2)$$

であるから、 $f'(x)=0$ と $x=-2, b, 2$ が同値である。よって、増減表は以下のようになる。

x	...	-2	...	b	...	2	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+	0	-
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$

よって、 $f(x)$ は、 $x=b$ のとき極小値

$$f(b) = b^4 - 24b^2 + a$$

$x=2$ のとき極大値

$$f(2) = a - 64b + 48$$

$x=-2$ のとき極大値

$$f(-2) = a + 64b + 48$$

をとる。

(答) 前表, $x=-2, b, 2$

(2)

極小値 $b^4 - 24b^2 + a$ が 0 であればいいので、 $a = 24b^2 - b^4$ を得る。

(答) $a = 24b^2 - b^4$

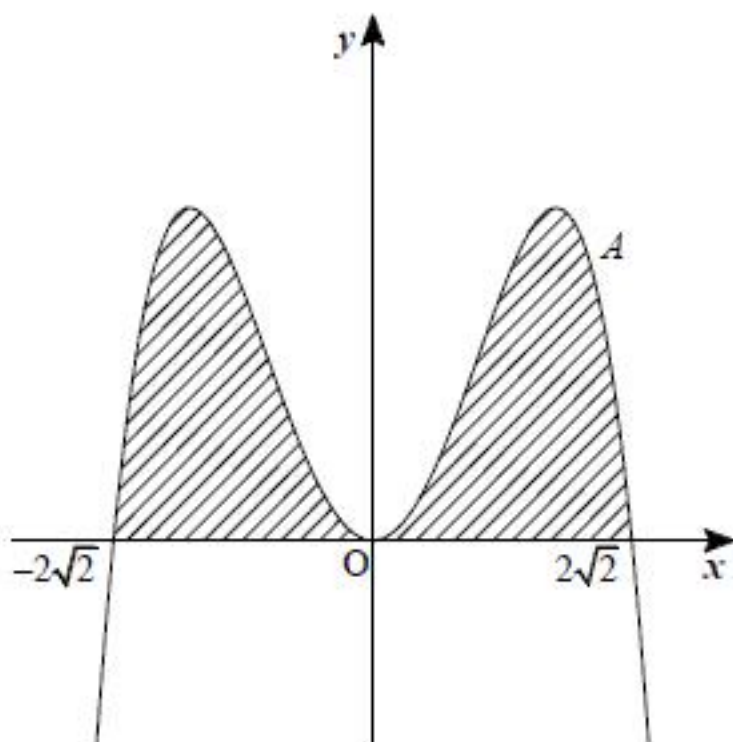
(3)

$a - 64b + 48 = a + 64b + 48$ であればいいので、 $b = 0$ を得る。

(答) $b = 0$

(4)

(2)と(3)より、 $a=b=0$ であるので、 $f(x) = -3x^4 + 24x^2$ を得る。



このとき A は y 軸に関して対称になるので、 $x > 0$ の領域のみ考えて答えを 2 倍すればよい。

$f(x)=0$ となるのは、 $x = \pm 2\sqrt{2}$ のときなので、

$$2 \int_0^{2\sqrt{2}} f(x) dx = 2 \left[-\frac{3}{5}x^5 + 8x^3 \right]_0^{2\sqrt{2}}$$

$$= \frac{512\sqrt{2}}{5}$$

となる。

(答) $\frac{512\sqrt{2}}{5}$

(1)

小円が α だけ回転した後の, ℓ と小円の接点を P' , 小円の中心の位置を O' とする。角度 α だけ転がっているので, $O'(\alpha, 0)$ となる。一方で, $\angle P'O'J' = \frac{\pi}{2} - \alpha$ であるので,

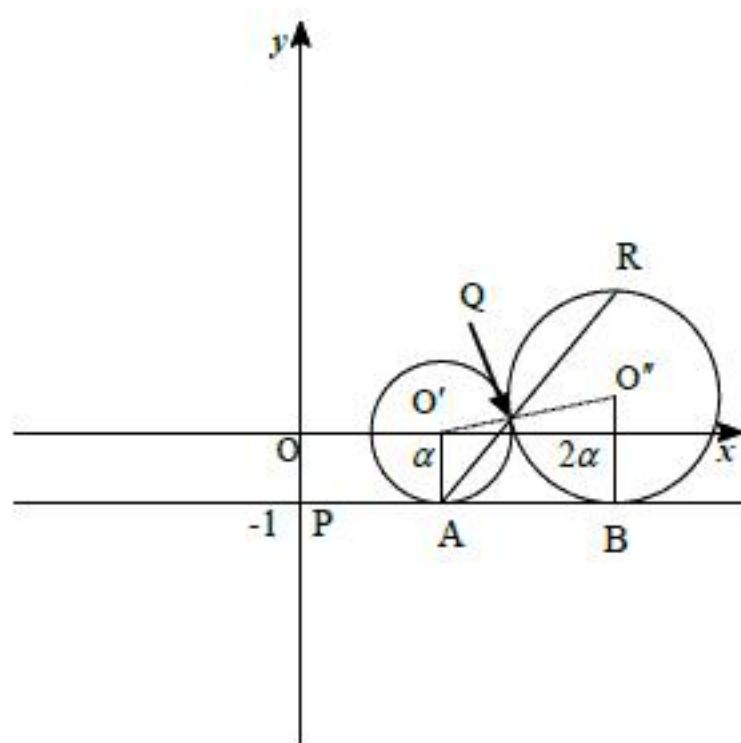
$\overrightarrow{O'J'} = (\cos \alpha, -\sin \alpha)$ となる。従って,

$$\overrightarrow{OJ'} = \overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{O'J'}$$

より, $J'(\alpha + \cos \alpha, -\sin \alpha)$ を得る。

(答) $J'(\alpha + \cos \alpha, -\sin \alpha)$

(2)



転がった後の大円の中心を O'' とすると, 三平方の定理より,

$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{3^2 - 1^2} \\ &= 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

がわかる。ここで, $PA = \alpha$, $PB = 2\alpha$ であることに注意すれば, $\alpha = AB = 2\sqrt{2}$ がわかる。すると, $\overrightarrow{O'O''} = (2\sqrt{2}, 1)$ と書ける。 $\overrightarrow{O'Q} = \frac{1}{3} \overrightarrow{O'O''}$ であるので, $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'Q}$ に注意すれ

ば, $Q\left(\frac{8\sqrt{2}}{3}, \frac{1}{3}\right)$ を得る。

(答) $Q\left(\frac{8\sqrt{2}}{3}, \frac{1}{3}\right)$

(3)

大円は小円を Q を中心に -2 倍に相似拡大したものである。従って $\overrightarrow{QR} = 2\overrightarrow{AQ}$ である。 $A(\alpha, -1)$ であるので,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OR} &= \overrightarrow{OQ} + 2\overrightarrow{AQ} \\ &= 3\overrightarrow{OQ} - 2\overrightarrow{OA} \end{aligned}$$

に注意して, $R(4\sqrt{2}, 3)$ を得る。

(答) $R(4\sqrt{2}, 3)$