

数 学

(工学部 機械工学科)

(平成19年度)

問題冊子 1 ～ 3 ページ

答案用紙 6 枚

下書き用紙 3 枚

注 意 事 項

1. 試験開始の合図があるまで問題冊子を開いてはいけない。
2. 枚数の不足や、印刷に不鮮明なところがあれば申し出ること。
3. 解答は必ず答案用紙の指定された箇所に記入すること。
解答は、最後の結果に至るまでのすじみちがわかるように記入すること。
やむをえず裏面まで解答がおよぶ場合は、その旨を表面に明記し、かつ、
受験番号等が記載されている部分（上部、右部分）の裏には記入しないこと。
4. 受験番号は、答案用紙 1 枚ごとに所定の欄 2 箇所に必ず記入すること。記入を忘れたり、あるいは誤った番号を記入した場合は失格となることがある。
5. 試験が終了したら、答案用紙を上から 1、2、……、6 の順番に重ねて机の上に置くこと。
6. 解答時間は 120 分である。途中退出は認められない。
7. 退室する時は、問題冊子・下書き用紙を持ち帰ること。

1

(1) 次の関数を微分せよ。(20 点)

$$y = 5^{-x} \cos x \log|\cos x| \quad (0 < x < \frac{\pi}{2})$$

(2) 次の不定積分を求めよ。(20 点)

$$\int \frac{x^3 - 4x^2 - x - 2}{x^2 - 5x + 4} dx$$

2

10ℓの水が入った容器Aと5ℓの水が入った容器Bと1ℓの水が入った容器Cがある。次のような一連の操作 (I), (II), (III)を行うことにする。

(I) 容器Aと容器Bの水量を調べ、水量の差の10分の1を水量が多い容器から水量が少ない容器へ移す。

(II) 1ℓの水を容器Cから容器Aへ移す。

(III) 1ℓの水を容器Bから容器Cへ移す。

一連の操作を n 回繰り返したときの容器Aの水量を $a_n \ell$ 、容器Bの水量を $b_n \ell$ とする。このとき、 a_n を n を用いて示せ。ただし、容器から水があふれることはないものとする。

(40 点)

3

関数 $f(x) = 2^{2x} + \frac{1}{2^{2x}} - 3\sqrt{2}\left(2^x + \frac{1}{2^x}\right) + 4$ について、次の問いに答えよ。

- (1) $2^x + \frac{1}{2^x} = t$ とおいて、 $f(x)$ を t で表し、図示せよ。(横軸に t の値を、縦軸に $f(x)$ の値をとって示せ。)(25 点)
- (2) $f(x)$ の最小値を求めよ。また、そのときの x の値を求めよ。(25 点)

4

次式で表される曲線を、鉛直方向に向いた y 軸の周りに一回転させる。
この回転でできる曲面を側面にもち、底面が水平な容器に水を注ぐ。

$$y = \frac{18}{x} - 3 \quad (1 \leq x \leq 6)$$

- (1) 深さ 10 のときの水の体積 V を求めよ。(25 点)
- (2) 単位時間あたり a の割合で水を注ぐとき、深さが 5 になったときの単位時間あたりの水面の上昇量を求めよ。(25 点)

5

曲線 A が関数 $y = f(x)$ で表されるとき、以下の問いに答えよ。ただし、 $f(x)$ は次式で与えられるものとする。

$$f(x) = -3x^4 + 4bx^3 + 24x^2 - 48bx + a \quad (-2 < b < 2)$$

- (1) 関数 $y = f(x)$ の増減表をつくり、極値を与える x を求めよ。(15 点)
- (2) 関数 $y = f(x)$ が極小となる点で曲線 A が x 軸と接するとき、 a を b で表せ。(15 点)
- (3) 関数 $y = f(x)$ の 2 つの極大値が等しくなるときの b を求めよ。(15 点)
- (4) 関数 $y = f(x)$ が極小となる点で曲線 A が x 軸と接し、かつ 2 つの極大値が等しくなるとき、曲線 A と x 軸で囲まれた図形の面積を求めよ。(15 点)

6

下図に示すように、点 $P(0, -1)$ で内接する中心 $(0, 0)$ の小円と中心 $(0, 1)$ の大円がある。この 2 つの円は共通接線 ℓ ($y = -1$) 上をすべることなく x の正方向に角度 α だけ転がった。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) 小円上の点 $J(1, 0)$ は、点 J' に移動した。角度 α を用いて点 J' の座標を表せ。(20 点)
- (2) 2 つの円は点 Q で外接した。角度 α および外接点 Q の座標を求めよ。(20 点)
- (3) 共通接線 ℓ と小円との接点を A 、大円との接点を B とする。いま、点 A から外接点 Q を通る直線 m を引き、直線 m と大円のもう一つの交点を R とする。このとき、点 R の座標を求めよ。(20 点)

