

(1) 加法定理より,

$$\sin(A+B) = \sin A \cos B + \sin B \cos A$$

$$\sin(A-B) = \sin A \cos B - \sin B \cos A$$

であるので, これらを加えることにより,

$$\sin(A+B) + \sin(A-B) = 2 \sin A \cos B$$

となる. $A+B=\alpha$, $A-B=\beta$ とおけば, 結論を得る.

(2) (1) の結果を用いると, $B+C = \pi - A = \frac{2}{3}\pi \dots (*)$ に注意して,

$$\begin{aligned} \sin B + \sin C &= 2 \sin \frac{\pi}{3} \cos \frac{B-C}{2} \\ &= \sqrt{3} \cos \frac{B-C}{2} \end{aligned}$$

を得る. ここで, B と C は正であることと $(*)$ より, $0 \leq |B-C| < \frac{2}{3}\pi$ がわかるので,

$$\frac{1}{2} < \cos \frac{B-C}{2} \leq 1$$

がわかる. よって,

$$\frac{\sqrt{3}}{2} < \sin B + \sin C \leq \sqrt{3}$$

である. また, (1) で, α と β をそれぞれ $\frac{\pi}{2} - \alpha$ と $\frac{\pi}{2} - \beta$ で置き換えることにより,

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

もわかる. よって,

$$\cos B + \cos C = \cos \frac{B-C}{2}$$

となるので,

$$\frac{1}{2} < \cos B + \cos C \leq 1$$

となる.

(1) 両方の病気にかかっていない人の割合は 96 % であり、そのうちの 5 % が病気 A にかかっていると診断されるわけであるから、全体の人数に対する割合は、

$$\frac{96}{100} \cdot \frac{5}{100} = \frac{6}{125}$$

である。

(2) A にかかっているという診断を受ける人は、もともと A にかかっている人か、B にかかっている人か、どちらの病気にもかかかっていないかの 3 つの場合があるので、

$$\frac{1}{100} \cdot \frac{98}{100} + \frac{3}{100} \cdot \frac{10}{100} + \frac{96}{100} \cdot \frac{5}{100} = \frac{38}{625}$$

である。

(3) A にかかっていて、実際に A と診断される割合は、

$$\frac{1}{100} \cdot \frac{98}{100} = \frac{49}{5000}$$

であるので、求める割合は、これを (2) の結果でわったものであり、

$$\frac{\frac{49}{5000}}{\frac{38}{625}} = \frac{49}{304}$$

である。

(1) 頂点が (α, α) であるような放物線は、

$$y = k(x - \alpha)^2 + \alpha$$

と書ける。これが $y = 4x$ と接しているので、連立して y を消去すると、

$$kx^2 - 2(\alpha k + 2)x + k\alpha^2 + \alpha = 0$$

となる。この方程式の判別式 D が 0 になる条件を考えて、

$$D/4 = (\alpha k + 2)^2 - k^2 \alpha^2 - k\alpha = 3k\alpha + 4 = 0$$

がわかる。これより、 $\alpha \neq 0$ であれば、 k が存在して所望の放物線が得られるので、これが α の取りうる範囲である。

(2) $k = -\frac{4}{3\alpha}$ を放物線の式に代入して、

$$y = -\frac{4}{3\alpha}x^2 + \frac{8}{3}x - \frac{1}{3}\alpha$$

が求めるものである。

(3)(2) を α に関する方程式とみなして、その解が存在するような (x, y) の条件を考える。 α に関する 2 次方程式に (2) を整理すると、

$$\alpha^2 + (3y - 8x)\alpha + 4x^2 = 0 \quad (*)$$

となる。この方程式が解をもつためには、判別式 D が 0 以上であればよく、

$$D = 48x^2 - 48xy + 9y^2 \geq 0$$

となるので、整理して、

$$(4x - 3y)(4x - y) \geq 0$$

を得る。

ここで、 $(*)$ が $\alpha = 0$ を解にもつ場合を考えると、それは $x = 0$ のときである。このとき、元の放物線の式で、 $\alpha = 0$ 、 $x = 0$ とすれば、 $y = 0$ がわかる。すなわち、 $(x, y) = (0, 0)$ は除外される。以上より、求める範囲は図のようになる。ただし原点を含まない。

(1) a の値によって場合分けする。また、

$$F(a) = \int_0^1 |f(x)| dx$$

とおく。

(i) $0 \leq a$ のとき、 $0 \leq x \leq 1$ で $f(x)$ は常に 0 以上であるから、

$$\begin{aligned} F(a) &= \int_0^1 (x^2 + ax) dx \\ &= \frac{a}{2} + \frac{1}{3} \end{aligned}$$

を得る。

(ii) $-1 \leq a < 0$ のとき、 $0 \leq x \leq -a$ では $f(x)$ は負で、 $-a \leq x \leq 1$ では $f(x)$ は正なので、

$$\begin{aligned} F(a) &= - \int_0^{-a} (x^2 + ax) dx + \int_{-a}^1 (x^2 + ax) dx \\ &= \frac{a}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} a^3 \end{aligned}$$

である。

(iii) $a < -1$ のとき、 $0 \leq x \leq 1$ では $f(x)$ は 0 以下なので、

$$\begin{aligned} F(a) &= - \int_0^1 (x^2 + ax) dx \\ &= -\frac{a}{2} - \frac{1}{3} \end{aligned}$$

である。

(2) 問題の等式中出现くる積分は定数値なので、それを c とおくと、

$$f(x) = x^2 - 4cx$$

と書ける。ここで、 $c = F(-4c)$ であるから、これを満たす c を求めればよい。

$$F(-4c) = \begin{cases} -2c + \frac{1}{3} & (c \leq 0) \\ \frac{64}{3} c^3 - 2c + \frac{1}{3} & (0 < c \leq 1/4) \\ 2c - \frac{1}{3} & (1/4 < c) \end{cases}$$

であるが、 $c \leq 0$ のときは、 $F(-4c) = 1/3 - 2c > 0$ なので、 $c = F(-4c)$ となる c は存在しない。 $0 < c \leq 1/4$ のとき、 $F(-4c) = c$ は、

$$(8c - 1)(8c^2 + c - 1) = 0$$