

1

(1)

$$f_2(x) = x \cdot x + (x^2 - 1) \cdot 1 = 2x^2 - 1$$

$$g_2(x) = x + x \cdot 1 = 2x$$

となる。さらにこれを使えば、

$$f_3(x) = x(2x^2 - 1) + (x^2 - 1) \cdot (2x) = 4x^3 - 3x$$

$$g_3(x) = 2x^2 - 1 + x \cdot (2x) = 4x^2 - 1$$

がわかる。

(2) n に関する数学的帰納法で示す。 $n = 1$ のときは、

$$x^2 - (x^2 - 1) = 1$$

より明らかである。 $n = k$ のとき、

$$\{f_k(x)\}^2 - (x^2 - 1)\{g_k(x)\}^2 = 1$$

が成立したとする。このとき、(b)の条件から、

$$\begin{aligned} & \{f_{k+1}(x)\}^2 - (x^2 - 1)\{g_{k+1}(x)\}^2 \\ &= \{xf_k(x) + (x^2 - 1)g_k(x)\}^2 - (x^2 - 1)\{f_k(x) + xg_k(x)\}^2 \\ &= \{f_k(x)\}^2 - (x^2 - 1)\{g_k(x)\}^2 \\ &= 1 \end{aligned}$$

なので、 $n = k + 1$ でも成立する。以上で、結論を得る。

(3) n についての帰納法で示す。 $n = 1$ のときは明らかである。 $n = k$ のとき、

$$\begin{cases} f_k(\cos \theta) = \cos n\theta \\ g_k(\cos \theta) \sin \theta = \sin n\theta \end{cases}$$

が成り立つとする。このとき、(b)を使えば、

$$\begin{aligned} f_{k+1}(\cos \theta) &= f_k(\cos \theta) \cos \theta + (\cos^2 \theta - 1)g_k(\cos \theta) \\ &= \cos k\theta \cos \theta - \sin k\theta \sin \theta \\ &= \cos(k+1)\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_{k+1}(\cos \theta) \sin \theta &= f_k(\cos \theta) \sin \theta + g_k(\cos \theta) \sin \theta \cos \theta \\ &= \cos k\theta \sin \theta + \sin k\theta \cos \theta \\ &= \sin(k+1)\theta \end{aligned}$$

が成り立つので、 $n = k + 1$ でも成立する。以上で、結論を得る。

2

(1) 楕円の方程式に $y = mx + n$ を代入して整理すると,

$$\left(m^2 + \frac{1}{4}\right)x^2 + 2mnx + n^2 - 1 = 0$$

となる. 楕円と直線が接するのは, これが重複解をもつとき, つまり判別式 D が 0 になる時であるから,

$$D/4 = (mn)^2 - \left(m^2 + \frac{1}{4}\right)(n^2 - 1) = 0$$

を整理して, $4m^2 - n^2 + 1 = 0$ を得る.

(2) 接線の方程式を $y = mx + n$ とおくと, これは (a, b) を通るので, $n = b - am$ がわかる. これを (1) の関係式に代入すると,

$$(4 - a^2)m^2 + 2abm - b^2 + 1 = 0$$

となる. m_1, m_2 はこの方程式の解なので, 解と係数の関係より,

$$m_1 m_2 = \frac{b^2 - 1}{a^2 - 4}$$

となる.

(3)(2) で $m_1 m_2 = -1$ とおいて分母を払い, 整理すると,

$$a^2 + b^2 = 5$$

を得る. よって, 求める距離は $\sqrt{5}$ である.

(1) A, B における法線はそれぞれ,

$$y = -ax + \log a + a^2$$

$$y = -bx + \log b + b^2$$

である. よってこの連立方程式をとくと, P の座標が

$$\left(\frac{\log a - \log b}{a - b} + a + b, \frac{b \log a - a \log b}{b - a} - ab \right)$$

であることがわかる. ここで微分係数の定義から,

$$\begin{aligned} & \lim_{b \rightarrow a} \frac{\log a - \log b}{a - b} \\ &= \frac{1}{a} \\ & \lim_{b \rightarrow a} \frac{b \log a - a \log b}{b - a} \\ &= \lim_{b \rightarrow a} \left(\log a - a \frac{\log b - \log a}{b - a} \right) \\ &= \log a - 1 \end{aligned}$$

だから, Q の座標は,

$$\left(2a + \frac{1}{a}, \log a - a^2 - 1 \right)$$

となる.

(2) AQ の長さの 2 乗を $L(a)$ と書くと,

$$L(a) = \left(a + \frac{1}{a} \right)^2 + (a^2 + 1)^2 = \frac{(a^2 + 1)^3}{a^2}$$

となる. 微分して,

$$L'(a) = \frac{2(a^2 + 1)^2(2a^2 - 1)}{a^3}$$

であるので, $L'(a) = 0$ となる $a > 0$ は $a = \sqrt{2}/2$ のみである. そして, $a < \sqrt{2}/2$ では $L'(a) < 0$ であり, $\sqrt{2}/2 < a$ では $L'(a) > 0$ であるから, $L(a)$ は $a = \sqrt{2}/2$ で最小になる. そのとき, AQ の長さは,

$$\sqrt{L\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

となる.

(1) 接点の x 座標を α とする。このとき、 $f'(\alpha) = 4\alpha^3 - 18\alpha$ であるから、接線の方程式は、

$$y = (4\alpha^3 - 18\alpha)x - 3\alpha^4 + 9\alpha^2$$

となる。ここに $(x, y) = (3, 0)$ を代入して整理すると、

$$\alpha(\alpha + 2)(\alpha - 3)^2 = 0$$

なので、 $\alpha = -2, 0, 3$ である。これらを代入して、接線の方程式は、

$$y = 4x - 12, y = 0, y = 54x - 162$$

である。

(2)(1) より、 $p = -2$ であり、このとき、

$$f(x) - (ax + b) = x^4 - 9x^2 - 4x + 12 = (x - 1)(x + 2)^2(x - 3)$$

なので、 $x = 1$ で積分区間を分ける。

$$\begin{aligned} & \int_{-2}^1 |f(x) - (ax + b)| dx \\ &= \int_{-2}^1 \{(x + 2)^4 - 8(x + 2)^3 + 15(x + 2)^2\} dx \\ &= \frac{243}{5} - 162 + 135 \\ &= \frac{108}{5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \int_1^3 |f(x) - (ax + b)| dx \\ &= - \int_1^3 \{f(x) - (ax + b)\} dx \\ &= \int_{-2}^1 \{f(x) - (ax + b)\} dx - \int_{-2}^3 \{f(x) - (ax + b)\} dx \\ &= \frac{108}{5} - 0 \\ &= \frac{108}{5} \end{aligned}$$

なので、もとめる定積分は $\frac{216}{5}$ である。