

(1)

$$\begin{aligned} f'(x) &= -2xe^{-x^2} \sin(x^2) + e^{-x^2} \cos(x^2) \cdot 2x \\ &= 2xe^{-x^2} \{\cos(x^2) - \sin(x^2)\} \end{aligned}$$

(2) 求める定積分を I とすると,

$$\begin{aligned} \int_2^{10} \frac{|5-x|}{\sqrt{x-1}} dx &= \int_2^5 \frac{5-x}{\sqrt{x-1}} dx + \int_5^{10} \frac{x-5}{\sqrt{x-1}} dx \\ &= -\int_2^5 \frac{x-5}{\sqrt{x-1}} dx + \int_5^{10} \frac{x-5}{\sqrt{x-1}} dx \\ &= -\int_2^5 \left(\sqrt{x-1} - \frac{4}{\sqrt{x-1}} \right) dx + \int_5^{10} \left(\sqrt{x-1} - \frac{4}{\sqrt{x-1}} \right) dx \\ &= -\left[\frac{2}{3}(x-1)\sqrt{x-1} - 8\sqrt{x-1} \right]_2^5 \\ &\quad + \left[\frac{2}{3}(x-1)\sqrt{x-1} - 8\sqrt{x-1} \right]_5^{10} \\ &= \frac{32}{3} - \frac{22}{3} - 0 + \frac{32}{3} \\ &= 8 \end{aligned}$$

である.

(3) 点 $(0, 1)$ と $(1, 0)$ をそれぞれ P , Q に移す変換は,

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

と書ける. よって, この逆行列は,

$$\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

となる. したがって, 求める行列は,

$$\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$$

である.

2

(1) 実際に計算すると,

$$A^2 = \begin{pmatrix} 20 & 10 \\ 10 & 5 \end{pmatrix} = 5A$$

である.

(2)

$$\begin{aligned} E + a_{n+1}A &= B^{n+1} = (E + a_nA)(E + A) \\ &= E + (a_n + 1)A + a_nA^2 \\ &= E + (6a_n + 1)A \end{aligned}$$

であるので, $a_{n+1} = 6a_n + 1$ という漸化式を得る. よって, $a_1 = 1$ とあわせて,

$$a_n = \frac{6^n - 1}{5}$$

となる.

3

- (1) 図の境界を含む斜線部が求める領域である.
- (2) $3x + 4y = k$ とおくと, これは傾きが $-3/4$ の直線である.
 これが D と共有点を持つような範囲を考えると, $(2, 2)$ を通るときが最大であることが図からわかる. よって, 最大値は

$$3 \cdot 2 + 4 \cdot 2 = 14$$

である.

- (3) $x^2 + y^2 + 2x - 2y = (x + 1)^2 + (y - 1)^2 - 2$ であるから,
 $(-1, 1)$ と D の点との距離が最大になればよい. よって, 図より
 $(3, 0)$ のとき最大となり, その最大値は

$$(3 + 1)^2 + (0 - 1)^2 - 2 = 15$$

である.

4

(1) l_1 の方程式は、 $y = 2tx - t^2 + 1$ である。よって、 Q の y 座標は $-t^2 + 1$ である。 l_2 の傾きは $-\frac{1}{2t}$ なので、 l_2 の方程式は、

$$y = -\frac{1}{2t}x - t^2 + 1$$

である。

(2) C_2 と l_2 の方程式を連立させて、 y を消去すると、

$$x^2 - \frac{1}{2t}x - t^2 + 2 = 0$$

となる。これが重解をもつ条件を求めればよい。判別式を D とすると、

$$0 = D = \frac{1}{4t^2} - 8 + 4t^2 = \frac{(4t^2 - 1)^2}{4t^2}$$

$$\frac{4(t^2 - 1)^2}{4t^2} = 0$$

$$\text{より, } 16t^4 - 32t^2 + 1 = 0$$

$$\begin{aligned} t^2 &= \frac{16 \pm 2\sqrt{60}}{16} \\ &= \left(\frac{\sqrt{10} \pm \sqrt{6}}{4} \right)^2 \end{aligned}$$

$$t > 0 \text{ より } t = \frac{\sqrt{10} \pm \sqrt{6}}{4} \text{ を得る.}$$

(1) 問題の曲線は t の増加とともに左下から右上に向かっていることに注意する. 面積を S とすると,

$$\begin{aligned} S &= \int_0^1 x dy \\ &= \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2 t}{1 + \sin t} dt \\ &= \int_0^{\pi/2} (1 - \sin t) dt \\ &= \frac{\pi}{2} - 1 \end{aligned}$$

である.

(2) 体積を V とすると,

$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 \pi x^2 dy \\ &= \pi \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^3 t}{(1 + \sin t)^2} dt \\ &= \pi \int_0^{\pi/2} \frac{\cos t(1 - \sin t)}{1 + \sin t} dt \\ &= \pi \int_0^{\pi/2} \left(-1 + \frac{2}{1 + \sin t} \right) \cos t dt \\ &= \pi [-\sin t + 2 \log(1 + \sin t)]_0^{\pi/2} \\ &= \pi(2 \log 2 - 1) \end{aligned}$$

である.