

数 学

(理 学 部 数 学 科)

(平 成 2 0 年 度)

問題冊子 1～4 ページ 答案用紙 4 枚

注 意 事 項

1. 試験開始の合図があるまで、この冊子を開いてはいけない。
2. 配布された用紙に、枚数の不足や印刷不鮮明な箇所がある場合には申し出ること。
3. 受験番号は、答案用紙 1 枚ごとに所定の欄 2 箇所に必ず記入すること。記入を忘れたり、誤った番号を記入したときは採点されないことがある。
4. 解答は必ず答案用紙の指定された箇所へ記入すること。**やむをえず裏面にまで解答が及ぶ場合には、その旨を明記し、かつ、受験番号を記入する部分（上部、右部分）の裏には記入しないこと。**
5. 試験が終了したら、4 枚の答案用紙を上から（その 1）、（その 2）、（その 3）、（その 4）の順になるように机上におくこと。
6. 退場するときは、問題冊子を持ち帰ること。

1

多項式 $f_1(x), f_2(x), \dots$ および $g_1(x), g_2(x), \dots$ を次の手順 (a), (b) により定める。

$$(a) \quad f_1(x) = x, \quad g_1(x) = 1$$

(b) $f_n(x), g_n(x)$ が定まったとき,

$$\begin{cases} f_{n+1}(x) = xf_n(x) + (x^2 - 1)g_n(x) \\ g_{n+1}(x) = f_n(x) + xg_n(x) \end{cases}$$

によって $f_{n+1}(x), g_{n+1}(x)$ を定める。

このとき、以下の問いに答えよ。

(1) $f_2(x), g_2(x)$ および $f_3(x), g_3(x)$ を求めよ。

(2) 自然数 n に対して、等式

$$\{f_n(x)\}^2 - (x^2 - 1)\{g_n(x)\}^2 = 1$$

が成立することを証明せよ。

(3) 自然数 n に対して、次の等式を証明せよ。

$$\begin{cases} f_n(\cos \theta) = \cos n\theta \\ g_n(\cos \theta) \sin \theta = \sin n\theta \end{cases}$$

2

楕円 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ を考える。以下の問いに答えよ。

- (1) 直線 $y = mx + n$ がこの楕円に接するとき、 m と n の関係式を求めよ。
- (2) 楕円の外部に点 $P(a, b)$ ($\frac{a^2}{4} + b^2 > 1$) をとる。ただし、 $|a| \neq 2$ とする。
点 P から楕円に引いた 2 つの接線の傾きを m_1, m_2 とするとき、積 $m_1 m_2$ を a, b を用いて表せ。
- (3) (2) における 2 つの接線が直交するとき、点 P と原点 O との距離を求めよ。

3

曲線 $C: y = \log x$ ($x > 0$) を考える。 C 上に異なる 2 点 $A(a, \log a)$, $B(b, \log b)$ をとり、 A, B における C の法線の交点を P とする。

- (1) b を a に近づけたときの点 P の極限を Q とする。 Q の座標を a を用いて表せ。
- (2) 線分 AQ の長さを最小にする a の値とそのときの AQ の長さを求めよ。

4

$f(x) = x^4 - 9x^2$ とする。以下の問いに答えよ。

- (1) 曲線 $y = f(x)$ の接線で点 $(3, 0)$ を通るものをすべて求めよ。
(2) (1) で求めた接線のうち、接点の x 座標が負のものを $y = ax + b$ とおく。

この接線の接点の x 座標を p としたとき、定積分

$$\int_p^3 |f(x) - (ax + b)| dx$$

を計算せよ。