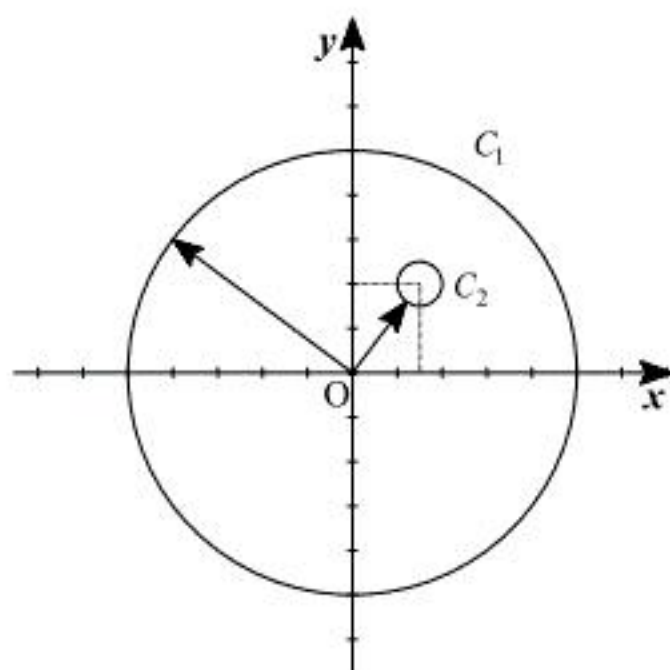


(1)



円 $C_1: x^2 + y^2 = 10^2$ は中心 O , 半径 $r_1 = 10 \cdots \textcircled{1}$ とする。円 $C_2: (x-3)^2 + (y-4)^2 = 1^2$ は中心 $A(3,4)$, 半径 $r_2 = 1 \cdots \textcircled{2}$ とする。円 C_1 上の点 $P(a,b)$ に対し, $\overrightarrow{OP} = (a,b)$, 円 C_2 上の点 $Q(c,d)$ に対し, $\overrightarrow{OQ} = (c,d)$ であるから, $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = (a,b) \cdot (c,d) = ac + bd = 0$ より $\overrightarrow{OP} \perp \overrightarrow{OQ}$ となる $(a,b), (c,d)$ を選べばよい。

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} &= (a,b) = 2(-4,3) = (-8,6) \\ \overrightarrow{OQ} &= (c,d) = \frac{4}{5}(3,4) = \left(\frac{12}{5}, \frac{16}{5}\right) \quad \cdots \text{答}\end{aligned}$$

とすれば, $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = ac + bd = 0$ を満たす。

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} &= (-8,6) \\ (\text{答}) \quad \overrightarrow{OQ} &= \left(\frac{12}{5}, \frac{16}{5}\right)\end{aligned}$$

(2)

$ac + bd$ の最大値は $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ}$ の最大値を考えればよい。2 ベクトル $\overrightarrow{OP}$ と $\overrightarrow{OQ}$ のなす角を θ とする。 (θ は実数全体)

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} &= ac + bd \\ &= |\overrightarrow{OP}| |\overrightarrow{OQ}| \cos \theta \\ &= 10 \cdot |\overrightarrow{OQ}| \cdot \cos \theta \\ &\leq 10 \cdot (5+1) \cdot 1 \\ &= 60\end{aligned}$$

となる。よって

$$(\text{答}) \quad (a,b) = (6,8), (c,d) = \left(\frac{18}{5}, \frac{24}{5}\right) \text{ のとき, 最大値 } 60$$

2

$y=4x^2$ と $y=2x^2+2$ を連立して、

$$4x^2 = 2x^2 + 2 \Leftrightarrow x^2 = 1$$

$$\therefore x = \pm 1$$

よって、 $y=4x^2$ と $y=2x^2+2$ の 2 交点は $(-1, 4)$ と $(1, 4)$ である。

(1)

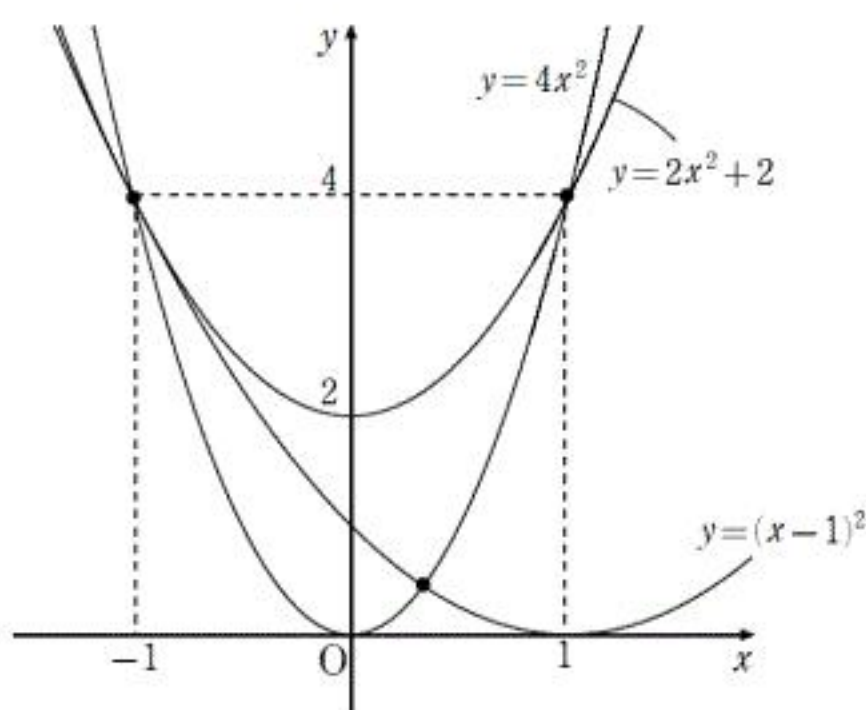
$a=1$ のとき、 $y=(x-a)^2$ は $y=(x-1)^2$ となる。 $y=2x^2+2$ と連立して

$$(x-1)^2 = 2x^2 + 2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^2 = 0$$

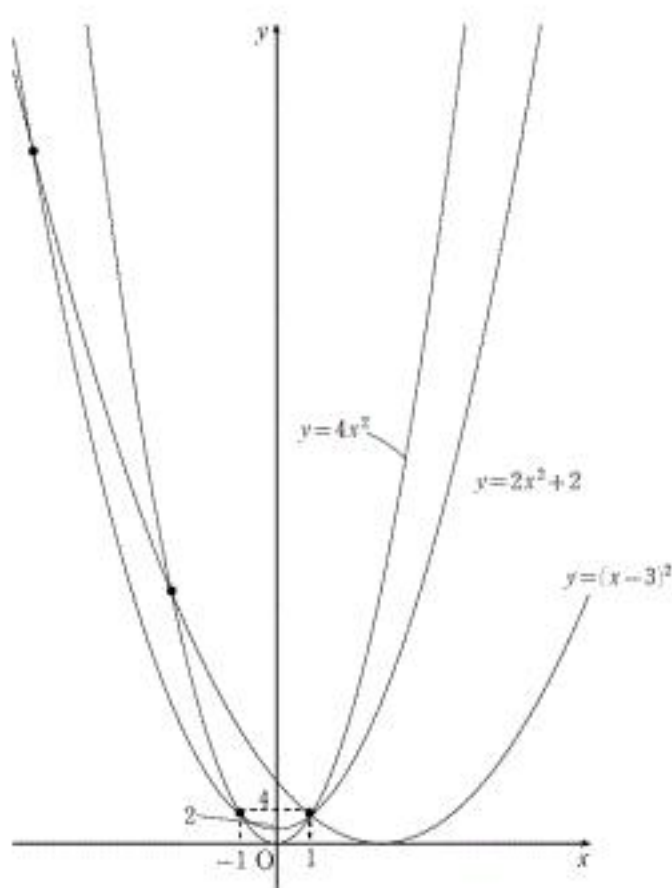
より、点 $(-1, 4)$ で $y=(x-1)^2$ と $y=2x^2+2$ は接することが分かる。グラフより、 $m=3$ となる。

(答) $m=3$

(2)

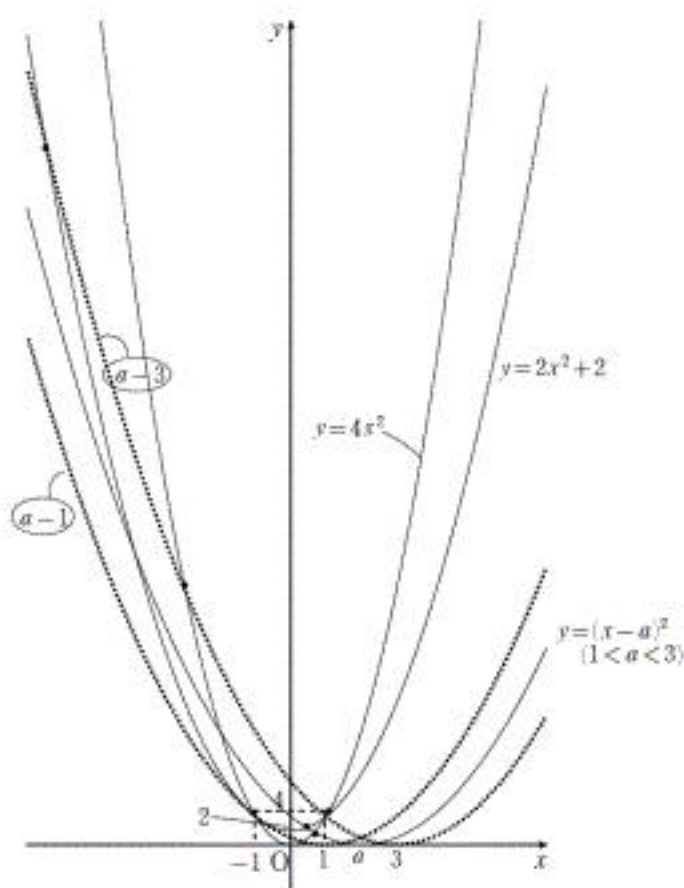
$a=3$ のとき、 $y=(x-a)^2$ は $y=(x-3)^2$ となる。点 $(1, 4)$ を通ることに注意してグラフを描くと

下図のようになる。グラフより、 $m=4$ となる。

(答) $m=4$

(3)

(1)の $a=1$ のときと、(2)の $a=3$ の間のときは下図のようになる。実数 a が $1 < a < 3$ のとき、グラフより $m=6$ となる。

(答) $m=6$

(1)

$$\begin{aligned}
 a_{n+2} &= -a_{n+1} + 2a_n \\
 \Leftrightarrow a_{n+2} - a_{n+1} &= -2a_{n+1} + 2a_n \\
 \Leftrightarrow p_{n+1} &= -2p_n
 \end{aligned}$$

である。数列 $\{p_n\}$ は初項 $p_1 = a_2 - a_1 = 4$ 、公比 -2 の等比数列より

$$p_n = 4 \cdot (-2)^{n-1} \quad (n=1, 2, 3, \dots) \quad \cdots \textcircled{1}$$

となる。さらに、

$$\begin{aligned}
 a_{n+2} &= -a_{n+1} + 2a_n \\
 \Leftrightarrow a_{n+2} + 2a_{n+1} &= a_{n+1} + 2a_n \\
 \Leftrightarrow q_{n+1} &= q_n
 \end{aligned}$$

である。数列 $\{q_n\}$ は初項 $q_1 = a_2 + 2a_1 = 1$ に注意して

$$q_n = 1 \quad (n=1, 2, 3, \dots) \quad \cdots \textcircled{2}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad p_n = 4 \cdot (-2)^{n-1}, \quad q_n = 1 \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

(2)

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{より}, \quad \begin{cases} a_{n+1} - a_n = 4 \cdot (-2)^{n-1} & \cdots \textcircled{1} \\ a_{n+1} + 2a_n = 1 & \cdots \textcircled{2} \end{cases} \quad \text{であるから}$$

$$\textcircled{2} - \textcircled{1}: 3a_n = 1 - 4 \cdot (-2)^{n-1}$$

$$\therefore a_n = \frac{1 - 4 \cdot (-2)^{n-1}}{3} \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \therefore a_n = \frac{1 - 4 \cdot (-2)^{n-1}}{3} \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

(3)

$$\begin{aligned}
 b_{n+2} &= -b_{n+1} + 2b_n + 1 \\
 \Leftrightarrow b_{n+2} - b_{n+1} - \frac{1}{3} &= -2 \left(b_{n+1} - b_n - \frac{1}{3} \right)
 \end{aligned}$$

であるから、数列 $\left\{ b_{n+1} - b_n - \frac{1}{3} \right\}$ は初項 $b_2 - b_1 - \frac{1}{3} = \frac{8}{3}$ 、公比 -2 の等比数列とわかり

$$\begin{aligned}
 b_{n+1} - b_n - \frac{1}{3} &= \frac{8}{3} \cdot (-2)^{n-1} \\
 \Leftrightarrow b_{n+1} - b_n &= \frac{1 + 8 \cdot (-2)^{n-1}}{3} \\
 &= \frac{1 - 4 \cdot (-2)^n}{3} \\
 &= a_{n+1}
 \end{aligned}$$

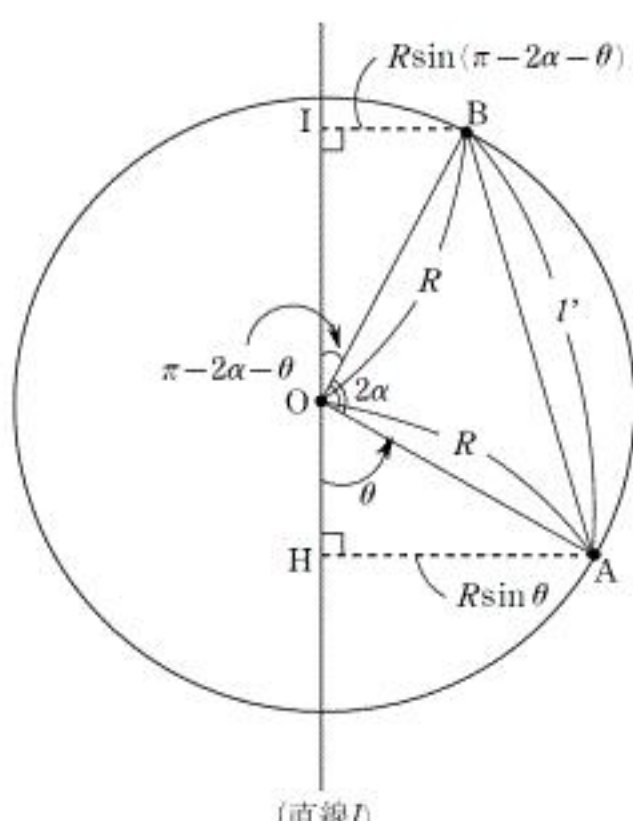
より、 $b_{n+1} - b_n = a_{n+1}$ が成り立つことが示された。 $n \geq 2$ のとき

$$\begin{aligned}
 b_n &= b_1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1 + 8 \cdot (-2)^{k-1}}{3} \\
 &= \frac{1}{3}(n-1) + \frac{\frac{8}{3} \{1 - (-2)^{n-1}\}}{1 - (-2)} \\
 &= \frac{1}{9} \{3n + 5 + (-2)^{n+2}\} \quad \cdots \text{答}
 \end{aligned}$$

$n=1$ のときもこの式を満たすので、 $n=1, 2, 3, \dots$ で成り立つ。

$$(\text{答}) \quad b_n = \frac{1}{9} \{3n + 5 + (-2)^{n+2}\}$$

(1)



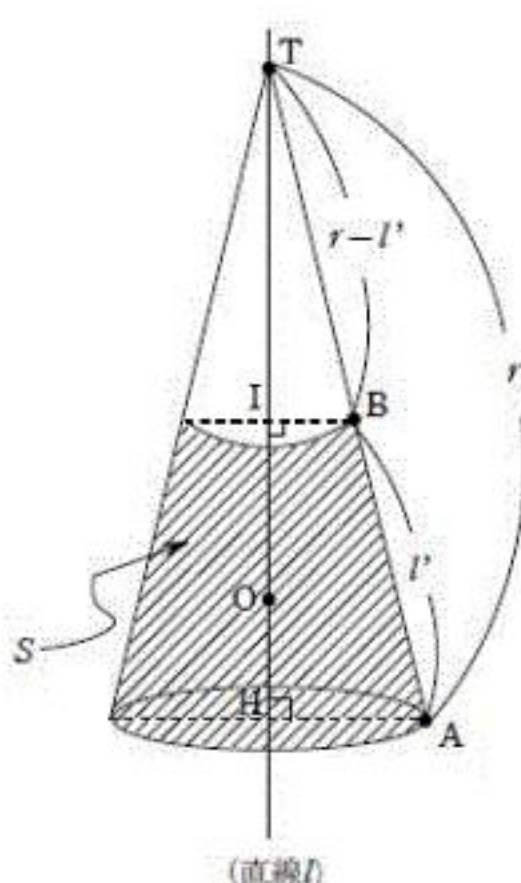
円の中心を O とし、弦 $AB = l'$ (一定) とおく。このとき、 $\angle AOB$ は $\angle AOB = 2\alpha$ で一定となる。
 正弦定理より

$$\frac{l'}{\sin \alpha} = 2R \Leftrightarrow l' = 2R \sin \alpha$$

となる。 A, B から l に下ろした垂線の足を H, I とすると、図の角 θ に対して

$$\begin{cases} AH = R \sin \theta \\ BI = R \sin(\pi - 2\alpha - \theta) = R \sin(2\alpha + \theta) \\ HI = R \cos \theta + R \cos(\pi - 2\alpha - \theta) \\ \quad = R \{\cos \theta - \cos(2\alpha + \theta)\} \end{cases}$$

である。ここで、 $\pi - 2\alpha - \theta < \theta \Leftrightarrow \theta > \frac{\pi}{2} - \alpha$ より $\frac{\pi}{2} - \alpha < \theta < \pi - 2\alpha$ で考えればよい ($BI < AH$ とする)。



上図の点(頂点) T に対して、 $TA = r$ とおくと $TB = r - l'$ ，三角形の相似を用いて

$$\begin{aligned} r - l' : r &= R \sin(2\alpha + \theta) : R \sin \theta \\ \Leftrightarrow \sin \theta \cdot (r - l') &= R \sin(2\alpha + \theta) \\ \Leftrightarrow r \cdot \{\sin \theta - \sin(2\alpha + \theta)\} &= l' \sin \theta \\ \Leftrightarrow r &= \frac{l' \sin \theta}{\sin \theta - \sin(2\alpha + \theta)} \end{aligned}$$

となる。これより $\begin{cases} TA = r = \frac{l' \sin \theta}{\sin \theta - \sin(2\alpha + \theta)} \\ TB = r - l' = \frac{l' \sin(2\alpha + \theta)}{\sin \theta - \sin(2\alpha + \theta)} \end{cases}$

となる。以上から

$$\begin{aligned} S &= S(\theta) \\ &= \pi r^2 \cdot \frac{2\pi \cdot R \sin \theta}{2\pi r} - \pi (r - l')^2 \cdot \frac{2\pi \cdot R \sin \theta}{2\pi r} \\ &= \pi \{r^2 - (r - l')^2\} \cdot \frac{R}{r} \sin \theta \\ S(\theta) &= \pi \left\{ \left(\frac{l' \sin \theta}{\sin \theta - \sin(2\alpha + \theta)} \right)^2 - \left(\frac{l' \sin(2\alpha + \theta)}{\sin \theta - \sin(2\alpha + \theta)} \right)^2 \right\} \\ &\quad \cdot \frac{\{\sin \theta - \sin(2\alpha + \theta)\} R \sin \theta}{l' \sin \theta} \\ &= \pi \cdot \frac{l'^2 \{\sin^2 \theta - \sin^2(2\alpha + \theta)\}}{\sin \theta - \sin(2\alpha + \theta)} \cdot \frac{R}{l'} \\ &= \pi l' R \cdot 2 \sin(\theta + \alpha) \cos \alpha \\ &= 4\pi R^2 \sin \alpha \cos \alpha \cdot \sin(\theta + \alpha) \end{aligned}$$

これは $\theta = \frac{\pi}{2} - \alpha$ のときも満たす。つまり、 $\frac{\pi}{2} - \alpha \leq \theta < \pi - 2\alpha$ で考えてよい。ならば、 $S(\theta) \leq$

$4\pi R^2 \sin \alpha \cos \alpha$ ($\theta = \frac{\pi}{2} - \alpha$, $AB \parallel l'$ のとき等号成立) である。以上より、題意は示された。

(証明終)

(2)

(1)より

$$\begin{aligned} S(\theta) &= 4\pi R^2 \sin \alpha \cos \alpha \cdot \sin(\theta + \alpha) \\ &\leq 4\pi R^2 \sin \alpha \cos \alpha \quad (\theta = \frac{\pi}{2} - \alpha \text{ つまり円柱のとき}) \\ &= 2\pi R^2 \sin 2\alpha \quad (0 < 2\alpha < \pi, \text{ つまり } 0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \text{ で } \alpha \text{ が変化する}) \\ &\leq 2\pi R^2 \quad (\alpha = \frac{\pi}{4} \text{ のとき等号成立}) \end{aligned}$$

となる。以上より $S(\theta)$ の最大値は $2\pi R^2$ となる。

(答) $2\pi R^2$