

1

(1)

$$a = \frac{2k+2}{3}, \quad b = \frac{-2k+4}{3}, \quad c = \frac{-k+2}{3}, \quad d = \frac{k+7}{3}. \quad \cdots \quad \text{[答]}$$

(2)

$$k = 2, -\frac{11}{5}. \quad \cdots \quad \text{[答]}$$

(3)

$$k = \frac{19}{2}. \quad \cdots \quad \text{[答]}$$

(1)

 $a_6 = 8$. … [答]

(2)

m を自然数とする. $a_{4m-3} = 5m - 4$, $a_{4m-2} = 5m - 2$, $a_{4m-1} = 5m$, $a_{4m} = 5m - 1$ であることを m に関する帰納法で証明する.

[1] $m = 1$ のとき, $a_1 = 1$, $a_2 = 3$, $a_3 = 5$, $a_4 = 4$ なので, 確かに成り立つ.

[2] $m = k$ のとき成立を仮定すると,

$$5m - 1 = a_{4m} < \frac{5}{4}(4m + 1) = 5m + \frac{5}{4} \text{ より } a_{4m+1} = 5m + 1.$$

$$5m + 1 = a_{4m+1} < \frac{5}{4}(4m + 2) = 5m + \frac{10}{4} \text{ より } a_{4m+2} = 5m + 3.$$

$$5m + 3 = a_{4m+2} < \frac{5}{4}(4m + 3) = 5m + \frac{15}{4} \text{ より } a_{4m+3} = 5m + 5.$$

$$5m + 5 = a_{4m+3} \geq \frac{5}{4}(4m + 4) = 5m + 5 \text{ より } a_{4m+4} = 5m + 4.$$

よって, $m = k + 1$ のときも成り立つ.

[1], [2] より, 任意の自然数 m に対して最初の命題は成立する. (証明終わり)

(3)

最小の n は 1609. … [答]

3

(1)

最大値は $\frac{1}{24}$. $\cdots$ [答]

(2) $\frac{1}{40}\{\log(16 + 5\sqrt{7}) - 2\log 3\}$. $\cdots$ [答]

(1)

$$t = 2a. \cdots \text{〔答〕}$$

(2)

$$Q(2a, 2a^2) \text{ なので, } \overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 2a - a^3 \\ \frac{a^2}{2} - 1 \end{pmatrix} \text{ となる. この傾きは } -\frac{1}{2a}.$$

$y' = x$ なので, $x = 2a$ における C の接線の傾きは $2a$.

傾きの積が -1 より直交する. (証明終わり)

(3)

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}}. \cdots \text{〔答〕}$$