

1

(1)

$$f(x) = x^3 + 3ax^2 + 3(a^2 - 1)x \text{ とおく。}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ \Leftrightarrow x \{ x^2 + 3ax + 3(a^2 - 1) \} &= 0 \\ \Leftrightarrow x = 0 \text{ または } x^2 + 3ax + 3(a^2 - 1) &= 0 \end{aligned}$$

である。ここで、 x の 2 次方程式 $x^2 + 3ax + 3(a^2 - 1) = 0$ が $x = 0$ を解に持つと仮定すると、

$$\begin{aligned} 0^2 + 3a \cdot 0 + 3(a^2 - 1) &= 0 \\ \Leftrightarrow a &= \pm 1 \end{aligned}$$

となるが、これは $0 < a < 1$ に矛盾する。したがって、 x の 2 次方程式 $x^2 + 3ax + 3(a^2 - 1) = 0$ は

$x = 0$ を解に持たない。また、この判別式を D とすると、

$$\begin{aligned} D &= (3a)^2 - 4 \cdot 3(a^2 - 1) \\ &= 3(2 - a)(2 + a) \\ &> 0 \quad (\because 0 < a < 1) \end{aligned}$$

となるので、この方程式は $x = 0$ 以外の異なる 2 実数解を持つ。したがって、方程式 $f(x) = 0$

は異なる 3 実数解を持つ。

(証明終)

(2)

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 + 6ax + 3(a^2 - 1) \\ &= 3 \{ x^2 + 2ax + (a+1)(a-1) \} \\ &= 3(x+a+1)(x+a-1) \end{aligned}$$

となるので、 $f(x)$ の増減表は次のとおりである。

x	...	$-a-1$	...	$1-a$	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗		↘		↗

したがって、 $f(x) = 2$ が 3 つの異なる実数解を持つ条件は、

$$\begin{cases} f(-a-1) > 2 \\ f(-a+1) < 2 \end{cases}$$

である。ここで、

$$\begin{aligned} f(-a-1) &= (-a-1)^3 + 3a(-a-1)^2 + 3(a^2-1)(-a-1) \\ &= -(a^3 + 3a^2 + 3a + 1) + 3a(a^2 + 2a + 1) + 3(-a^3 - a^2 + a + 1) \\ &= -a^3 + 3a + 2 \\ &= -a(a - \sqrt{3})(a + \sqrt{3}) + 2 \\ &> 0 + 2 \quad (\because 0 < a < 1) \\ &= 2 \end{aligned}$$

より、 $f(-a-1) > 2$ が成り立つ。また、

$$\begin{aligned} f(-a+1) &= (-a+1)^3 + 3a(-a+1)^2 + 3(a^2-1)(-a+1) \\ &= (-a^3 + 3a^2 - 3a + 1) + 3a(a^2 - 2a + 1) + 3(-a^3 + a^2 + a - 1) \\ &= -a^3 + 3a - 2 \\ &< -0 + 3 \cdot 1 - 2 \quad (\because 0 < a < 1) \\ &< 2 \end{aligned}$$

より、 $f(-a+1) < 2$ が成り立つ。したがって、 $0 < a < 1$ のとき、 $f(x) = 2$ 、すなわち

$x^3 + 3ax^2 + 3(a^2 - 1)x - 2 = 0$ は異なる 3 つの実数解を持つ。

(証明終)

(1)

$\angle A = \alpha, \angle B = \beta, \angle C = \gamma$ とおくと,

$$\begin{aligned} P(B) &= P(C) \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA} &= \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} \\ \Leftrightarrow |\overrightarrow{BC}| |\overrightarrow{BA}| \cos \beta &= |\overrightarrow{CA}| |\overrightarrow{CB}| \cos \gamma \\ \Leftrightarrow |\overrightarrow{BA}| \cos \beta &= |\overrightarrow{CA}| \cos \gamma \quad \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

と変形できる。ここで、正弦定理より,

$$\begin{aligned} \frac{|\overrightarrow{CA}|}{\sin \beta} &= \frac{|\overrightarrow{AB}|}{\sin \gamma} \\ \Leftrightarrow |\overrightarrow{CA}| &= \frac{\sin \beta}{\sin \gamma} |\overrightarrow{AB}| \quad \dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

であるから、②を①に代入すると,

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{BA}| \cos \beta &= \frac{\sin \beta}{\sin \gamma} |\overrightarrow{AB}| \cdot \cos \gamma \\ \Leftrightarrow \frac{1}{\tan \beta} &= \frac{1}{\tan \gamma} \quad \dots \textcircled{3} \end{aligned}$$

となる。 β, γ は三角形の内角であるので、 $0 < \beta, \gamma < \pi$ であるから,

$$\textcircled{3} \Leftrightarrow \beta = \gamma$$

である。したがって,

$$AB = AC$$

となる。

以上より、 $P(B) = P(C)$ となる三角形は、 $AB = AC$ の二等辺三角形である。

(答) $AB = AC$ の二等辺三角形

(2)

(1)より、 $P(A) \neq 0$ のとき,

$$\begin{aligned} P(A)P(B) &= P(C)P(A) \\ \Leftrightarrow P(B) &= P(C) \end{aligned}$$

となるので、 $AB = AC$ の二等辺三角形を表す。 $P(A) = 0$ のときは,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} &= 0 \\ \therefore \angle BAC &= \frac{\pi}{2} \quad \left(\because |\overrightarrow{AB}| \neq 0, |\overrightarrow{AC}| \neq 0 \right) \end{aligned}$$

となるので、 $\angle BAC = \frac{\pi}{2}$ の直角三角形である。

以上より、 $P(A)P(B) = P(C)P(A)$ を満たす三角形は、 $AB = AC$ の二等辺三角形または,

$\angle BAC = \frac{\pi}{2}$ の直角三角形である。

(答) $AB = AC$ の二等辺三角形, または $\angle BAC = \frac{\pi}{2}$ の直角三角形

3

(1)

10 を取り出す確率は、 $\frac{2}{5}$ であり、5 を取り出す確率は、 $\frac{3}{5}$ であるから、求める期待値は、

$$10 \cdot \frac{2}{5} + 5 \cdot \frac{3}{5} = 7$$

である。

(答) 7

(2)

取り出したカード 2 枚の合計が 20 となる確率は、

$$\frac{{}_2C_2}{{}_5C_2} = \frac{1}{10}$$

であり、15 となる確率は、

$$\frac{{}_3C_1 \cdot {}_2C_1}{{}_5C_2} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

であり、10 となる確率は、

$$\frac{{}_3C_2}{{}_5C_2} = \frac{3}{10}$$

である。よって求める期待値は、

$$20 \cdot \frac{1}{10} + 15 \cdot \frac{3}{5} + 10 \cdot \frac{3}{10} = 14$$

となる。

(答) 14

(3)

[1] 最初に取り出したカードの合計が 20 のとき、

取り出した 3 枚の合計は 30 または 25 であり、3 枚目のカードを引くとき、袋の中には 10 が 1 枚と 5 が 3 枚入っている。このことを踏まえて、各々の確率は、(2)より、次表のようになる。

3 枚の合計	確率
30	$\frac{1}{10} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{40}$
25	$\frac{1}{10} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{40}$

[2] 最初に取り出したカードの合計が 15 のとき、

取り出した 3 枚の合計は 25 または 20 であり、3 枚目のカードを引くとき、袋の中には 10 が 1 枚と 5 が 2 枚入っている。このことを踏まえて、各々の確率は、(2)より、次表のようになる。

3 枚の合計	確率
25	$\frac{3}{5} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{5}$
20	$\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{5}$

[3] 最初に取り出したカードの合計が 10 のとき、

取り出した 3 枚の合計は 20 または 15 であり、3 枚目のカードを引くとき、袋の中には 10 が 2 枚と 5 が 2 枚入っている。このことを踏まえて、各々の確率は、(2)より、次表のようになる。

3 枚の合計	確率
20	$\frac{3}{10} \cdot \frac{2}{4} = \frac{3}{20}$
15	$\frac{3}{10} \cdot \frac{2}{4} = \frac{3}{20}$

以上[1], [2], [3]より、求める期待値は、

$$30 \cdot \frac{1}{40} + 25 \cdot \frac{3}{40} + 25 \cdot \frac{1}{5} + 20 \cdot \frac{2}{5} + 20 \cdot \frac{3}{20} + 15 \cdot \frac{3}{20} = \frac{167}{8}$$

となる。

(答) $\frac{167}{8}$

$$\begin{aligned}
S(a) &= \int_a^{a+1} |f(x) - g(x)| dx \\
&= \int_a^{a+1} \left| \left(\frac{12}{5}x^2 - \frac{32}{5}x + 4 \right) - (2x - 2) \right| dx \\
&= \int_a^{a+1} \left| \frac{12}{5}x^2 - \frac{42}{5}x + 6 \right| dx
\end{aligned}$$

となる。ここで、

$$\frac{12}{5}x^2 - \frac{42}{5}x + 6 = \frac{6}{5}(x-1)(2x-5)$$

であるから、

$$x \leq 1, \frac{5}{2} \leq x \text{ のとき } \frac{12}{5}x^2 - \frac{42}{5}x + 6 \geq 0$$

$$1 < x < \frac{5}{2} \text{ のとき } \frac{12}{5}x^2 - \frac{42}{5}x + 6 < 0$$

となる。よって、 a の値で場合分けして計算する。

[1] $1 \leq a < \frac{3}{2}$ のとき

$$\begin{aligned}
S(a) &= -\int_a^{a+1} \left(\frac{12}{5}x^2 - \frac{42}{5}x + 6 \right) dx \\
&= -\left[\frac{4}{5}x^3 - \frac{21}{5}x^2 + 6x \right]_a^{a+1} \\
&= -\left\{ \frac{4}{5}(3a^2 + 3a + 1) - \frac{21}{5}(2a + 1) + 6 \right\} \\
&= -\frac{12}{5}a^2 + 6a - \frac{13}{5}
\end{aligned}$$

[2] $\frac{3}{2} \leq a < \frac{5}{2}$ のとき

$$\begin{aligned}
S(a) &= -\int_a^{\frac{5}{2}} \left(\frac{12}{5}x^2 - \frac{42}{5}x + 6 \right) dx + \int_{\frac{5}{2}}^{a+1} \left(\frac{12}{5}x^2 - \frac{42}{5}x + 6 \right) dx \\
&= -\left[\frac{4}{5}x^3 - \frac{21}{5}x^2 + 6x \right]_a^{\frac{5}{2}} + \left[\frac{4}{5}x^3 - \frac{21}{5}x^2 + 6x \right]_{\frac{5}{2}}^{a+1} \\
&= -\left(\frac{25}{2} - \frac{105}{4} + 15 - \frac{4}{5}a^3 + \frac{21}{5}a^2 - 6a \right) \\
&\quad + \left\{ \frac{4}{5}(a^3 + 3a^2 + 3a + 1) - \frac{21}{5}(a^2 + 2a + 1) + 6(a + 1) - \frac{25}{2} + \frac{105}{4} - 15 \right\} \\
&= \frac{8}{5}a^3 - 6a^2 + 6a + \frac{1}{10}
\end{aligned}$$

[3] $\frac{5}{2} \leq a$ のとき

$$\begin{aligned}
S(a) &= \int_a^{a+1} \left(\frac{12}{5}x^2 - \frac{42}{5}x + 6 \right) dx \\
&= \frac{12}{5}a^2 - 6a + \frac{13}{5}
\end{aligned}$$

以上[1], [2], [3]より、

$$S(a) = \begin{cases} -\frac{12}{5}a^2 + 6a - \frac{13}{5} & (1 \leq a < \frac{3}{2} \text{ のとき}) \\ \frac{8}{5}a^3 - 6a^2 + 6a + \frac{1}{10} & (\frac{3}{2} \leq a < \frac{5}{2} \text{ のとき}) \\ \frac{12}{5}a^2 - 6a + \frac{13}{5} & (\frac{5}{2} \leq a \text{ のとき}) \end{cases}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad S(a) = \begin{cases} -\frac{12}{5}a^2 + 6a - \frac{13}{5} & (1 \leq a < \frac{3}{2} \text{ のとき}) \\ \frac{8}{5}a^3 - 6a^2 + 6a + \frac{1}{10} & (\frac{3}{2} \leq a < \frac{5}{2} \text{ のとき}) \\ \frac{12}{5}a^2 - 6a + \frac{13}{5} & (\frac{5}{2} \leq a \text{ のとき}) \end{cases}$$